Reductio ad absurdum (РАА)

Последње правило које ваља увести на овом ступњу у много чему је најмоћније и најкорисније; лако га је разумети, мада мало теже доследно установити. Назваћемо га *правилом reductio ad absurdum* (РАА). Прво дефинишемо *контрадикцију. Контрадикција* је конјункција чији је други конјункт негација првог конјункта: тако су $P \mathbin{\&} \neg P$, $R \mathbin{\&} \neg R$, $(P \rightarrow Q) \mathbin{\&} \neg (P \rightarrow Q)$ све редом контрадикције. Сада претпоставите да из неке претпоставке А, можда заједно са другим претпоставкама, можемо као закључак извести контрадикцију; тада нам РАА допушта да изведемо $\neg A$ као закључак из тих других претпоставки (ако их има). Ово правило почива на природном начелу да, ако се из A може дедуковати противречност, A не може бити истинито, тако да имамо право да тврдимо његову негацију $\neg A$.

Ево примера.

$P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \vdash \neg P$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$P \rightarrow \neg Q$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1,3 МПП
2,3	(5)	$\neg Q$	2,3 МПП
1,2,3	(6)	$Q \mathbin{\&} \neg Q$	4,5 У&
1,2	(7)	$\neg P$	3,6 РАА

Ово је типичан пример употребе РАА-а. Тежећи закључку $\neg P$, претпостављамо (ред (3)) P и надамо се да ћемо из њега извести противречност; јер, ако P води противречности, по-моћу РАА-а можемо закључити $\neg P$. У реду (6) добијамо контрадикцију $Q \mathbin{\&} \neg Q$, па тако у реду (7) закључујемо $\neg P$. Са десне стране наводимо претпоставку коју окривљујемо за противречност - ону чију негацију закључујемо у кораку РАА-а, овде је то (3) - и саму контрадикцију, овде (6). Са леве стране, као и код корака КД-а, број претпоставки се природно смањује за један, при чему се испушта она коју окривљујемо за контрадикцију.

$P \rightarrow \neg P \vdash \neg P$

1	(1)	$P \rightarrow \neg P$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	$\neg P$	1,2 МПП
1,2	(4)	$P \mathbin{\&} \neg P$	2,3 У&
1	(5)	$\neg P$	2,4 РАА

Поново желећи да добијемо ¬P, претпостављамо P (ред (2)) и добијамо контрадикцију (ред (4)). Према томе, пошто је дато (1), помоћу РАА-а закључујемо $\neg P$. Доказани низ је упадљив, а можда и неочекиван - када је дато да ако је неки исказ случај, онда је то и његова негација, можемо закључи-ти да је његова негација истинита. Ово је први изненађујући резултат који је установљен помоћу наших правила, али ће их бити још.

Правило РАА је посебно корисно када желимо да изведемо *негативне* закључке. Оно сугерише да, уместо што покушавамо да начинимо директан доказ, треба да претпоставимо одговарајући *потврдни* исказ и настојимо да изведемо контрадикцију, на тај начин посредно утврђујући негативни исказ. Оно се, међутим, такође може користити да би се утврдили и сами потврдни искази, *via* ДН. Ако желимо да изведемо A, можемо претпоставити $\neg A$ и добити контрадикцију. Стога помоћу РАА-а можемо закључити $\neg\neg A$ (негацију онога што смо претпоставили) и тако помоћу ДН-е добијамо A. Погодно опште упутство за откривање доказа гласи да, када директни покушаји изневере, често ће успети доказ по-моћу РАА-а.