Глава 1

Предикатска логика

1.1 Синтакса предикатске логике

1.1.1 Појам терма и предиката.

Променљиве. Квантификатори

1.1.2 Језик предикатске логике

За азбуку предикатске логике можемо рећи да има свој логички и нелогички део.

Дефиниција логичког дела азбуке предикатске логике

Логички део азбуке предикатске логике, који ћемо означавати $\mathcal{J}_l$, састоји се од следећа четири скупа:

(1) пребројивог скупа индивидуалних променљивих, скупа $\mathcal{V}$, чије елементе ћемо означавати са $x, y, z, ..., x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, ...$;

(2) скупа логичких везника $\{\bot, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$, где је $\bot$ нуларни везник, а $\wedge, \vee$ и $\Rightarrow$ бинарни везници;

(3) скупа квантификатора $\{\forall, \exists\}$, где је $\forall$ универзални, а $\exists$ егзистенцијални квантификатор;

(4) скупа помоћних симбола $\{(,)\}$.

Дефиниција нелогичког дела азбуке предикатске логике

Нелогички део азбуке предикатске логике, који ћемо означавати $\mathcal{J}$, састоји се од следећа три скупа:

(1) скупа симбола константи чије елементе ћемо најчешће означавати са $a, b, c,...$, или 0, 1 и слично;

(2) скупа операцијских (функцијских) симбола, скупа $\mathcal{O}$, чије елементе ћемо најчешће означавати са $f, g, h,...$, или знацима $*$, $+$, $\cdot$, $\bullet$ и слично. Сваком операцијском симболу је додељен неки природан број n, његова дужина;

(3) скупа релацијских симбола (предиката) скупа $\mathcal{R}$, чије елементе ћемо најчешће означавати са $\alpha, \beta, \gamma,...$, или $<$, $=$, $\subseteq$ и слично. Сваком релацијском симболу је додељен неки природан број m, његова дужина.

Истакнимо да када говоримо о алфабету предикатске логике његов логички део $\mathcal{J}_l$ можемо сматрати непромењљивим. Наиме, увек имамо скуп променљивих $\mathcal{V}$ и помоћне симболе, и увек имамо све логичке везнике (јер је увек скуп везника нека база везника) и имамо оба квантификатора. С друге стране, нелогички део алфабета предикатске логике, скуп $\mathcal{J}$ који зовемо језик, може се мењати. Штавише, алфабет не мора да има константе, операцијске или релацијске симболе. При прављењу важних форми предикатске логике (терама и предикатских формула) на располагању ће нам бити различите константе, различити скупови операцијских симбола, различити скупови релацијских симбола, односно те форме можемо правити над различитим језицима. При дефинисању терама и предикатских формула, увек ћемо претпоставити да смо фиксирали неки језик $\mathcal{J}$ и да од његових симбола и симбола логичког дела $\mathcal{J}_l$ правимо те терме и предикатске формуле. Стога, појмове терма и предикатске формуле ћемо увек везивати за неки језик $\mathcal{J}$ и говорићемо о термима и предикатским формулама над неким језиком $\mathcal{J}$.

Прво дефинишимо терме или изразе над неким језиком $\mathcal{J}$.

Дефиниција терма (израза)

(1) Симбили константи и индивидуалне променљиве језика $\mathcal{J}$ су терми.

(2) Ако су $t_1, ..., t_n$ терми и f функцијски симбол дужине n из језика $\mathcal{J}$, онда је и $f(t_1, ..., t_n)$ терм.

(3) Терми се могу градити само коначном применом делова (1) и (2) ове дефиниције.

Пример 1 Посматрајмо језик $\mathcal{J} = \{a, 0, +\}$, где су a и 0 симболи константи и $+$ операцијски симбол дужине 2 (тј. бинарни операцијски симбол). Најједноставнији терми над језиком $\mathcal{J}$ су константе 0 и a и све променљиве $x, y, z, ...$ скупа $\mathcal{V}$. А сада ево и неколико сложенијих терама над језиком $\mathcal{J}$:

$+(0,a),\quad +(z,0),\quad +(x,y)\quad$ и $\quad +(+(+(x,z),0),+(+(y,z),+(x,a)))$.

Одмах рецимо да се у случају бинарних операцијских симбола симбол операције најчешће пише између терама, уместо испред пара терама на који делују ти знаци. То је последица начина писања познатих бинарних аритметичких операција $+$, $\cdot$ или $-$. Дакле, уместо $+(x,y)$ пишемо $x+y$. Користећи овај договор горе наведени сложени терми над језиком $\mathcal{J}$ могу се редом записати и на следећи начин:

$0+a,\quad z+0,\quad x+y\quad$ и $\quad((x+z)+0)+((y+z)+(x+a))$.

Сада дефинишемо појам предикатске формуле над неким језиком $\mathcal{J}$.

Дефиниција предикатске формуле

(1) Нуларни логички везник $\perp$ је предикатска формула.

(2) Ако су $t_1,\ldots,t_n$ терми и ρ релацијски симбол дужине n из језика $\mathcal{J}$, онда је и $\rho(t_1,\ldots,t_n)$ предикатска формула.

(3) Ако су A и B предикатске формуле, онда су $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$ и $(A\Rightarrow B)$ предикатске формуле.

(4) Ако је A предикатска формула и x индивидуална променљива, онда су $((\forall x)A)$ и $((\exists x)A)$ предикатске формуле.

(5) Предикатске формуле се могу градити само коначном применом делова (1), (2), (3) и (4) ове дефиниције.

Предикатске формуле ћемо краће звати формуле. Најједноставније предикатске формуле из делова (1) и (2) горње дефиниције ћемо звати елементарне предикатске формуле или атомске формуле.

Договоримо се, као и у исказној логици, да при прављењу сложених формула не пишемо сувишне заграде. На пример, формуле $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\Rightarrow B)$, $((\forall x)A)$ и $((\exists x)A)$ писаћемо редом $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\Rightarrow B$, $(\forall x)A$ (или $\forall xA$) и $(\exists x)A$ (или $\exists xA$).

У наредном примеру ћемо представити један језик $\mathcal{J}$ и неке предикатске формуле над тим језиком.

Пример 2 Посматрајмо језик $\mathcal{J}=\{c,*,\alpha\}$, где је c симбол константе, $*$ бинарни операцијски симбол и α бинарни релацијски симбол. Напоменимо да договор о писању бинарног операцијског симбола који смо навели у **Примеру 1** важи и за сваки бинарни релацијски симбол ρ, односно следећа два записа су равноправна: $\rho(x,y)$ и $x\ \rho\ y$. Ми ћемо у зависности од релацијског симбола α користити један од њих. Ево неколико предикатских формула над овим језиком $\mathcal{J}$:

$$\alpha(x,c),\qquad \alpha(x*y,(c*z)*x),$$
$$(\forall x)\alpha(c,x),\qquad (\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$$
$$(\forall y)((\alpha(c*x,y)\wedge\alpha(c,c))\Rightarrow(\exists x)\alpha(x,y)).$$

Приметимо да су прве две формуле елементарне формуле.

С друге стране, следеће форме
$(\forall x)(\exists z)\alpha(x, y, z)$, $(\forall x)(\exists y)x * y = c$ и $(\forall x)\alpha(x * y * z, c)$
нису формуле над језиком $\mathcal{J}$. У првој форми α је искоришћена као релацијски симбол дужине 3, а α је по дефиницији релацијски симбол дужине 2. Запис $(\forall x)(\exists y)x*y = c$ није формула над језиком $\mathcal{J}$ јер је у њему коришћен симбол који не припада том језику, релацијски симбол $=$. У трећем запису све је у реду са употребом релацијских и операцијских симбола, тј. сви они су симболи језика и њихова дужина одговара дефинисаној дужини тих симбола. Међутим, имамо терм $x*y*z$ који није прецизно написан. Наиме, он може бити терм $(x*y)*z$, али и терм $x*(y*z)$, а та два терма (као низови симбола) нису једнака.

Сетимо се да смо у исказној логици после дефинисања појма исказне формуле дефинислаи и појам потформуле неке исказне формуле, као њен део који је и сам исказна формула. Слично ће бити и са потформулама неке предикатске формуле. Посматрајмо предикатску формулу $(\forall x)(\exists y)\alpha(x, y)$ из Примера 2. Приметимо да су неки њени делови, на пример $(\exists y)\alpha(x, y)$ и $\alpha(x, y)$ и сами предикатске формуле над језиком $\mathcal{J}$. Те формуле ћемо звати потформуле полазне формуле $(\forall x)(\exists y)\alpha(x, y)$.

Ако сваку предикатску формулу гледамо као једну реч језика предикатске логике, онда је свака њена подреч, која је и сама предикатска формула, једна потформула те формуле. А сада дефинишимо скуп свих потформула неке предикатске формуле.

Дефиниција скупа потформула неке формуле

Скуп свих потформула предикатске формуле над неким језиком $\mathcal{J}$ F, скуп $P_f(F)$, индуктивно дефинишемо на следећи начин:
(1) сама формула F припада скупу $P_f(F)$;
(2) ако је $\forall x A \in P_f(F)$, онда је $A \in P_f(F)$;
ако је $\exists x A \in P_f(F)$, онда је $A \in P_f(F)$;
ако је $A \wedge B \in P_f(F)$, онда је $A \in P_f(F)$ и $B \in P_f(F)$;
ако је $A \vee B \in P_f(F)$, онда је $A \in P_f(F)$ и $B \in P_f(F)$;
ако је $A \Rightarrow B \in P_f(F)$, онда је $A \in P_f(F)$ и $B \in P_f(F)$.

Као што смо већ рекли, користећи дефиниције и осталих логичких везника које смо раније представили, везника $\neg$ и $\Leftrightarrow$, можемо од предикатских формула A и B правити и предикатске формуле облика $\neg A$ и $A \Leftrightarrow B$, а и нуларни везник $\top$ је предикатска формула.

1.1.3 Слободне и везане промењиве, супституција терама

Посматрајмо произвољну формулу F над неким језиком $\mathcal{J}$. Међу свим промењивим које се појављају у формули F неке промењиве су под дејством квантификатора и називају се везане, а неке нису, и називају се слободне променљиве те формуле F. Погледајмо одмах један пример.

Пример 3 Имамо језик $\mathcal{J} = \{0, +, <, =\}$, где је 0 симбол константе, $+$ је функцијски симбол дужине 2 и $<$ и $=$ су два релацијска симбола оба дужине 2. Погледајмо прво једну формулу над језиком $\mathcal{J}$ која нема квантификаторе, тј. једну елементарну формулу:

$$0 + z < x + y.$$

Све променљиве које се појављују у тој формули, променљиве x, y и z, су слободне променљиве те елементарне формуле. И у општем случају важи да су све променљиве било које елементарне формуле над неким језиком слободне променљиве те формуле. Али, када се у формули појављују квантификатори онда морамо прецизирати шта то значи бити под дејством квантификатора. Посматрајмо формулу F:

$$(\forall x)x < y \wedge z < 0.$$

У њој се појављују променљиве x, y и z. Постоји само један квантификатор, квантификатор уз променљиву x: $\forall x$. Јасно је да се у некој формули сваки квантификатор односи на неку променљиву, па ћемо често за запис квантификатор са променљивом просто говорити квантификатор не помињући променљиву, ако то није неопходно. Дакле, у горњој формули F за квантификатор $\forall x$ поље деловања је потформула $x < y$. Одмах закључујемо да се променљива z не налази у пољу деловања ниједног квантификатора, па је она слободна променљива посматране формуле. Шта је са променљивима x и y? Обе променљиве се налазе у пољу деловања квантификатора $\forall x$, али само је променљива на коју се та квантификатор односи, дакле променљива x, под дејством тог квантификатора. Дакле, x је везана, а y је слободна променљива посматране формуле. Закључујемо, x је везена, а z и y су слободне променљиве посматране формуле F.

Сада дајемо строгу дефиницију скупа слободних променљивих неке формуле F.

Дефиниција скупа слободних променљивих у некој формули

Скуп слободних променљивих неке формуле F, скуп $SP(F)$, дефинише се на следећи начин:

◇ ако је F елементарна формула, онда све променљиве које се појављују у F припадају $SP(F)$;

◇ ако је F формула облика $\neg A$, онда је $SP(F) = SP(A)$;

◇ ако је F формула облика $A \wedge B$, $A \vee B$ или $A \Rightarrow B$, онда је $SP(F) = SP(A) \cup SP(B)$;

$\diamond$ ако је F формула облика $\forall xA$ или $\exists xA$, онда је $SP(F) = SP(A) \setminus \{x\}$.

Пример 4 Одредимо скуп слободних промењивих формуле F :

$$(\forall x)(0 < (x+y) \wedge \neg(\exists y)(y < 0))$$

над језиком $\mathcal{J} = \{0, +, <, =\}$. Имамо да је

$$SP(F) = SP(0 < (x+y) \wedge \neg(\exists y)(y < 0)) \setminus \{x\}.$$

Скуп слободних промењивих формуле

$$0 < (x+y) \wedge \neg(\exists y)(y < 0)$$

је $SP(0 < (x+y)) \cup SP(\neg(\exists y)(y < 0))$.

Сада, одредимо скупове слободних промењивих формула

$$0 < (x+y) \quad \text{и} \quad \neg(\exists y)(y < 0).$$

Формула $0 < (x+y)$ је елементарна, па је $SP(0 < (x+y)) = \{x, y\}$.

За формулу $\neg(\exists y)(y < 0)$ имамо

$SP(\neg(\exists y)(y < 0)) = SP(\exists y(y < 0)) = SP(y < 0) \setminus \{y\} = \{y\} \setminus \{y\} = \emptyset.$

Дакле, скуп слободних промењивих формуле F је

$$SP(F) = (\{x, y\} \cup \emptyset) \setminus \{x\} = \{y\}.$$

Користећи скуп слободних промењивих неке формуле F дефинишемо њене слободне и везане промењиве.

Дефиниција слободних и везаних промењивих

Ако важи $x \in SP(F)$, онда је промењива x слободна промењива формуле F.

Ако постоји потформула формуле F облика $\forall xA$ или $\exists xA$ и важи $x \in SP(A)$, онда је промењива x везана промењива формуле F.

Приметимо да једна промењива може бити и везана и слободна промењива неке формуле F. У формули F, $(\forall x)(0 < (x+y) \wedge \neg(\exists y)(y < 0))$, из Примера 4 промењива y је и везана и слободна промењива те формуле. Већ смо показали да y јесте слободна промењива формуле F, а сада покажимо да је и везана промењива те формуле. Формула F има потформулу облика $(\exists y)A$, то је потформула $(\exists y)y < 0$ и y је слободна у формули A, односно $y < 0$. Дакле y јесте везана промењива формуле F. Природно је поставити питање: да ли може да се избегне ситуација да је једна промењива истовремено и слободна и везана? Одговор је: ДА. За нашу формулу F у њеној потформули $(\exists y)y < 0$ промењиву y замењујемо неком потпуно новом промењивом која се не појављује у формули F, на пример z и добијамо формулу

$$(\forall x)(0 < x + y \wedge \neg(\exists z)z < 0),$$

чији скупови везаних и слободних промењивих су дисјунктни: скуп слободних промењивих је $\{y\}$, а скуп везаних промењивих је $\{x, z\}$. Генерално, ако је нека промењива x и слободна и везана промењива произвољне формуле F, онда у свакој потформули формуле F облика $\forall xA$ или $\exists xA$ где $x \in SP(A)$

променљиву x замењујемо неком потпуно новом променљивом која се не појављује у формули F.

Предикатске формуле које немају слободних променљивих зовемо затворене формуле или реченице. Одмах истакнимо велики значај слободних променљивих у некој формули. Када будемо говорили о значењу (вредности) предикатских формула, односно о семантици предикатске логике, слободне променљиве ће бити у главној улози. Наиме, вредност било које предикатске формуле зависи од вредности њених слободних променљивих, тј. променом вредности слободне променљиве неке формуле мења се и вредност те формуле.

Осим тога, слободне променљиве су важне и у синтакси предикатске логике. Од посматране формуле F заменом њене слободне променљиве x неким термом добијамо нову формулу коју ћемо означавати са F^x_t. Али не можемо било коју слободну променљиву формуле F замењивати произвољним термом. Та замена мора бити исправна, односно променљива x може бити замењена термом t ако ниједна променљива терма t том заменом не постаје везана променљива у формули F^x_t. Пре него што дамо строгу дефиницију исправне замене погледајмо један пример.

Пример 5 Имамо језик $\mathcal{J} = \{c, *, \alpha\}$ из Примера 2 и предикатска формула F :

$$(\forall y)\alpha(y * c, x) \vee \alpha(c, c)$$

над тим језиком има једну слободну променљиву, променљиву x. Погледајмо неке исправне замене променљиве x у тој формули. Потпуно је јасно да замена, која то у ствари и није, замена променљиве x термом који је сама та променљива x јесте исправна замена, тј. формула

$$F^x_x = (\forall y)\alpha(y * c, x) \vee \alpha(c, c)$$

је настала исправном заменом. Даље, ако променљиву заменимо термом који не садржи променљиве опет вршимо исправну замену. На пример, променљиву x замењујемо термом $(c * c) * c$ који нема променљивих и добијамо формулу

$$F^x_{(c*c)*c} = (\forall y)\alpha(y * c, (c * c) * c) \vee \alpha(c, c).$$

Још једна исправна замена је да се променљива замени термом кога чини само једна променљива, која је потпуно нова и не појављује се у посматраној формули. У нашем примеру променљиву x замењујемо термом z:

$$F^x_z = (\forall y)\alpha(y * c, z) \vee \alpha(c, c)$$

и то је исправна замена.

А како изгледа неисправна замена? Па, неисправна замена је да променљиву x у посматраној формули F заменимо, на пример, термом $y * z$:

$$F^x_{y*z} = (\forall y)\alpha(y * c, y * z) \vee \alpha(c, c).$$

Променљива y терма $y * z$ у формули F^x_{y*z} постаје везана, тј. она је у тој формули под дејством квантификатора $\forall y$.

Можемо ли да дамо рецепт за прављење исправних замена слободне променљиве x посматране формуле F? Па, слободна променљива x се појављује у потформули $\alpha(y * c, x)$ која је поље деловања квантификатора $\forall y$ и x је слободна променљива те потформуле, зато сваки терм t којим хоћемо да заменимо променљиву x не сме да има променљиву y, јер би том заменом његова променљива дошла под дејство квантификатора $\forall y$ и постала везана у формули F^x_t.

Овај рецепт из **Примера 5** у општем случају за произвољну формулу F, њену слободну променљиву x и неки терм t има следећи облик: ни за једну променљиву y терма t не сме да постоји потформула формуле F облика $(\forall y)A$ таква да је x слободна променљива у A. Ако ово својство важи онда је терм t слободан за променљиву x у формули F. Користећи овај појам, дајемо дефиницију исправне замене.

Дефиниција исправне замене променљиве термом у формули

Ако је терм t слободан за променљиву x у некој формули F, онда је замена променљиве x термом t у формули F исправна.

1.2 Семантика предикатске логике

У овом поглављу ћемо се бавити значењем предикатских формула. Као и у случају исказних формула, тако и за сваку предикатску формулу главно питање ће бити која је њена вредност (од две могуће вредности), односно да ли је та формула истинита или лажна (неистинита).

1.2.1 Валуације и релација задовољивости

Појам модела

У поступку одређивања вредности неке исказне формуле, њена исказна слова различитим валуацијама су добијала значење (интерпретирали смо их као) истинит (1) или лажан (неистинит) (0), а затим, користећи дефиницију функције интерпретације за те валуације рачунали смо вредност посматране формуле.

Пут до вредности (истинита или неистинита) предикатске формуле је другачији. За неку предикатску формулу F прво треба знати језик $\mathcal{J}$ над којим је та предикатска формула направљена, а затим интерпретирати променљиве из скупа $\mathcal{V}$ и симболе језика $\mathcal{J}$. Наиме, треба изабрати непразан скуп S, који ћемо звати носач или домен, чији елементи ће бити вредности за променљиве из скупа $\mathcal{V}$. Осим тога, свака константа језика $\mathcal{J}$ ће бити неки издвојен елемент из S, сваки операцијски симбол f језика $\mathcal{J}$, чија дужина је n, ће бити интерпретиран тачно једном операцијом дужине n над скупом S (тј. функцијом из скупа S^n у скуп S), и на крају сваки релацијски симбол ρ језика $\mathcal{J}$, чија дужина је m, ће бити интерпретиран тачно једном релацијом дужине m над скупом S (тј. функцијом из скупа S^m у скуп $\{0,1\}$).

Ево једног примера.

Пример 1 Имамо језик $\mathcal{J} = \{c, *, \alpha\}$, где је c симбол константе, $*$ бинарни операцијски (функцијски) симбол и α бинарни релацијски симбол. За носач бирамо скуп природних бројева $\mathbf{N}$. Значи, промењљиве из скупа $\mathcal{V}$ узимају вредности из скупа природних бројева, за константу c бирамо природан број 1, операцијски симбол $*$ дужине 2, интерпретирамо операцијом $+ : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$, односно сабирањем природних бројева и релацијски симбол α дужине 2, интерпретирамо релацијом једнакости $=$ природних бројева (тј. функцијом $=: \mathbf{N}^2 \to \{0,1\}$).

Дефиниција структуре $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ за језик $\mathcal{J}$

Једну структуру за језик $\mathcal{J}$ чине непразан скуп S и функција $I^{\mathcal{J}}$ дефинисана над језиком $\mathcal{J}$ на следећи начин:

(1) сваком симболу константе c језика $\mathcal{J}$ одговара тачно један елемент c_I скупа S, тј. $I^{\mathcal{J}}(c) = c_I$;

(2) сваком операцијском симболу f језика $\mathcal{J}$, чија дужина је n, одговара тачно једна операција f_I, $f_I : \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}$, тј. $I^{\mathcal{J}}(f) = f_I$;

(3) сваком релацијском симболу ρ језика $\mathcal{J}$, чија дужина је m, одговара тачно једна релација дужине m на скупу S, $\rho_I \subseteq \mathrm{S}^m$ (односно функција ρ_I, $\rho_I : \mathrm{S}^m \to \{0,1\}$), тј. $I^{\mathcal{J}}(\rho) = \rho_I$.

Ту структуру ћемо означавати $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$, а скуп S ћемо звати носач или домен структуре $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$.

У Примеру 1 ми смо представили структуру $(\mathbf{N}, 1, +, =)$ за језик $\mathcal{J} = \{c, *, \alpha\}$. Структуре $(\mathbf{Z}, 1, \cdot, \leq)$ и $(\mathbf{R}, 0, \cdot, <)$ су исто тако структуре за тај језик $\mathcal{J}$. Али, са прављењем структура за неки језик морамо бити опрезни. На пример, структура $(\mathbf{R}, 0, <, =)$ није структура за наш језик $\mathcal{J} = \{c, *, \alpha\}$ јер је и тој структури бинарни операцијски симбол $*$ језика $\mathcal{J}$ интерпретиран бинарном релацијом $<$!

Када имамо једну структуру $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ за језик $\mathcal{J}$, онда промењљивим из скупа промењљивих $\mathcal{V}$ додељујемо вредности из носача S. Једна валуација v за скуп промењљивих $\mathcal{V}$ у односу на носач S структуре $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ је једно пресликавање $v : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, које свакој промењљивој из $\mathcal{V}$ додељује један елемент из S. Ако за валуацију v, промењљиву x_i и неки елемент d скупа S важи $v(x_i) = d$, онда кажемо да је d вредност промењљиве x_i валуацијом v.

За неки језик $\mathcal{J}$ једна структура $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ и једна валуација $v : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, чине једну интерпретацију коју ћемо означавати $((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), v) = (\mathcal{S}, v)$ или I_v.

Када за неки језик $\mathcal{J}$ имамо одређену интерпртацију $((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), v) = (\mathcal{S}, v)$, онда следи питање: како се том интерпретацијом одређује вредност неког терма или предикатске формуле над језиком $\mathcal{J}$, односно како се тај терм (предикат ска формула) интерпретира? Почнимо са интерпретацијом терма. Неки терм над језиком $\mathcal{J}$ чине променљиве и константе повезане операцијским симболима. Интерпретацијом $((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), v) = (\mathcal{S}, v)$ свака константа тог терма је добила вредност неког елемената из носача S, свака његова променљива је валуацијом v добила неку вредност из истог скупа и коначно сваки операцијски симбол дужине n тог терма постаје конкретна операција над елементима скупа S. Дакле, вредност терма неком интерпретацијом I_v је резултат неких операција над елементима скупа S, према томе, то је неки елемент скупа S. То исто каже и строга дефиниција интерпретације терма која следи.

Дефиниција интерпретације терма

Вредност (значење) терма t у интерпретацији I_v одређеној структуром $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ и валуацијом $v : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, означавамо са $I_v(t)$ и дефинишемо на следећи начин:

◇ ако је терм t променљива x, онда $I_v(t) = v(x)$;

◇ ако је терм t константа c, онда $I_v(t) = c_I$;

◇ ако је терм t облика $f(t_1, ..., t_n)$ (при чему је дужина функцијског симбола f једнака n) и ако је $I_v(t_i) = d_i$, $d_i \in \mathrm{S}$, $1 \leq i \leq n$, онда је $I_v(t) = f_I(d_1, ..., d_n)$.

А ево и једног примера.

Пример 2 Наведимо неколико терама на језику $\mathcal{J} = \{c, *\}$,, где је $*$ бинарни операцијски симбол:

$$x, \quad c, \quad (c * x) * y \quad \text{и} \quad ((c * x) * c) * y.$$

Одредимо вредност тих терама у интерпретацији I_v одређеној структуром $(\mathbf{N}, 1, +)$ и валуацијом $v : \mathcal{V} \to \mathbf{N}$ за коју је $v(x) = 3$ и $v(y) = 5$. Вредности тих терама су неки елементи носача структуре, у нашем случају скупа природних бројева:

$I_v(x) = v(x) = 3, \qquad I_v(c) = c_I = 1,$

$I_v((c * x) * y) = (c_I + v(x)) + v(y) = (1 + 3) + 5 = 9,$

$I_v(((c * x) * c) * y) = ((c_I + v(x)) + c_I) + v(y) = ((1 + 3) + 1) + 5 = 10.$

У општем случају, вредност терма не може бити истинит или лажан. Истинита или лажна може бити предикатска формула. Ево дефиниције интерпретације предикатске формуле.

Дефиниција интерпретације предикатске формуле

Вредност (значење) предикатске формуле F у интерпретацији I_v одређеној структуром $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ и валуацијом $v : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, интерпретацији $(\mathcal{S}, v)$, означавамо са $I_v(F)$ и дефинишемо на следећи начин:

◇ ако је F елементарна формула $\perp$, онда је $I_v(\perp) = 0$;

$\diamond$ ако је F елементарна формула облика $\top$, онда је $I_v(\top) = 1$;

$\diamond$ ако је F елементарна формула облика $\rho(t_1, ..., t_n)$ (при чему је дужина релацијског симбола ρ једнака n) и ако је $I(t_i) = d_i$, $d_i \in$ S, $1 \leq i \leq n$, онда је $I_v(\rho(t_1, ..., t_n)) = \rho_I(d_1, ..., d_n)$;

$\diamond$ ако је F формула облика $\neg A$,

онда је $I_v(\neg A) = 1 - I_v(A)$;

$\diamond$ ако је F формула облика $A \wedge B$,

онда је $I_v(A \wedge B) = min(I_v(A), I_v(B))$;

$\diamond$ ако је F формула облика $A \vee B$,

онда је $I_v(A \vee B) = max(I_v(A), I_v(B))$;

$\diamond$ ако је F формула облика $A \Rightarrow B$,

онда је $I_v(A \Rightarrow B) = max(1 - I_v(A), I_v(B))$;

$\diamond$ ако је F формула облика $A \Leftrightarrow B$, онда је:

$I_v(A \Leftrightarrow B) = 1$ ако је $I_v(A) = I_v(B)$, иначе је $I_v(A \Leftrightarrow B) = 0$;

$\diamond$ ако је F формула облика $\forall x A$,

онда је $I_v(\forall x A) = min\{I_v(A^x_d) : d \in \mathrm{S}\}$;

$\diamond$ ако је F формула облика $\exists x A$,

онда је $I_v(\exists x A) = max\{I_v(A^x_d) : d \in \mathrm{S}\}$.

Приметимо да се вредности предикатских формула које су направљене уз помоћ логичких везника одређују као и вредности исказних формула направљених уз помоћ истих везника. Остаје нам да прокоментаришемо вредности предикатских формула облика $\forall x A$ и $\exists x A$ у некој интерпретацији I_v.

Пример 3 Посматрајмо језик $\mathcal{J} = \{c, *, \alpha\}$ из Примера 1 и три предикатске формуле над тим језиком:

$$(\forall x)\alpha(c, x), \quad (\exists x)\alpha(x, c) \quad \text{и} \quad (\forall x)\alpha(x, x * c).$$

Одредимо вредност тих предикатских формула у интерпретацији I_v која је дата структуром $(\mathbf{N}, 1, +, <)$ и валуацијом $v : \mathcal{V} \to \mathbf{N}$.

Прва формула постаје: $(\forall x)\ 1 < x$.

Одређујемо $I_v((\forall x)1 < x)$:

$I_v((\forall x)1 < x) = min\{I_v((1 < x)^x_d) : d \in \mathbf{N}\} = min\{I_v(1 < d) : d \in \mathbf{N}\}$.

Дакле, да би смо одредили вредност $I_v((\forall x)1 < x)$ морамо одредити вредност том интерпретацијом I_v свих формула $(1 < x)^x_d$, где d пролази скуп $\mathbf{N}$, односно вредност интерпретацијом I_v сваке од формула $1 < 0$, $1 < 1$, $1 < 2$,... Ако су све ове формуле истините, онда ће скуп $\{I_v(1 < d) : d \in \mathbf{N}\}$ бити једночлан, имаће само елемент 1, и $I_v((\forall x)1 < x) = min\{1\} = 1$. У супротном, вредност формуле $(\forall x)1 < x$ ће бити 0. Имамо да су све посматране формуле, осим прве две, истините, тј. интерпретацијом I_v имају вредност 1, а прва $0 < 1$ и друга $1 < 1$ су лажне, тј. том интерпретацију имају вредност 0, па је скуп $\{I_v(1 < d) : d \in \mathbf{N}\} = \{0, 1\}$. Стога,

$$I_v((\forall x)1 < x) = min\{I_v(1 < d) : d \in \mathbf{N}\} = min\{0, 1\} = 0,$$

па је формула $(\forall x)\alpha(c, x)$ лажна у интерпретацији $((\mathbf{N}, 1, +, <), v)$.

Друга формула постаје: $(\exists x)\ x < 1$.

Одређујемо $I_v((\exists x)1 < x)$:

$I_v((\exists x)1 < x) = max\{I_v((x < 1)^x_d) : d \in \mathbf{N}\} = max\{I_v(d < 1) : d \in \mathbf{N}\}$.

Да би смо одредили вредност $I_v((\exists x)x < 1)$ опет морамо одредити вредност свих формула $(x < 1)^x_d$, где d пролази скуп $\mathbf{N}$, односно вредност формула $0 < 1$, $1 < 1$, $2 < 1$,... У овом случају за квантификатор $\exists$ довољно је да једна од њих буде истинита, тј. да 1 буде елемент скупа $\{I_v(d < 1) : d \in \mathbf{N}\}$ и формула $(\exists x)x < 1$ ће бити истинита јер је максимум скупа $\{I_v(d < 1) : d \in \mathbf{N}\}$ једнак 1. Све посматране формуле осим прве су нетачне, па је $I_v(0 < 1) = 1$, а $I_v(d < 1) = 0$, за $d \in \mathbf{N}, d \neq 0$. Дакле,

$$I_v((\exists x)x < 1x) = max\{0, 1\} = 1.$$

Закључујемо да је формула $(\exists x)\alpha(x, c)$ истинита у интерпретацији $((\mathbf{N}, 1, +, <), v)$.

Трећа формула је: $(\forall x)\ x < x + 1$.

Њена вредност интерпретацијом I_v је

$$I_v((\forall x)x < x + 1) = min\{I_v((x < x + 1)^x_d) : d \in \mathbf{N}\}.$$

Потребно је одредити вредности формула $d < d + 1$, $d \in \mathbf{N}$, тј. формула $1 < 2$, $2 < 3$,... Све ове формуле су истините, тј. имају вредност 1, па је $I_v((\forall x)x < x + 1) = 1$. Закључујемо да је формула $(\forall x)\alpha(x, x * c)$ истинита у интерпретацији $((\mathbf{N}, 1, +, <), v)$.

Приметимо да у претходном примеру нисмо много водили рачуна о валуацији v која слика скуп променљивих $\mathcal{V}$ у скуп $\mathbf{N}$. Погледајмо наше формуле из тог примера у светлу слободних променљивих. Све три формуле су реченице, односно немају слободних променљивих. Истакнимо да за неку интерпретацију $(\mathcal{S}, v)$ вредност $I_v(F)$ зависи од неке валуације $v : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$ само ако формула F има слободних променљивих. На пример, ако је променљива x слободна променљива формуле F онда нам је потребна вредност $v(x)$ да бисмо одредили $I_v(F)$. Посебно, ако је формула F реченица, тј. формула која нема слободних променљивих, онда вредност $I_v(F)$ не зависи од v, па уместо $I_v(F)$ често пишемо $I(F)$.

Ево примера интерпретације формуле која није реченица.

Пример 4 Посматрајмо једну формулу која има слободних променљивих над познатим језиком $\mathcal{J} = \{c, *, \alpha\}$, формулу:

$$(\forall x)\alpha(x, x * y).$$

Слободна променљива ове формуле је променљива y. Нека је дата само структура једне интерпретација I_v, структура $(\mathbf{Z}, 0, +, <)$. Задатак, да се одреди истиносна вредност ове формуле за ту интерпретацију I_v, не можемо да урадимо. Наиме, посматрана формула у овој интерпретацији је формула

$$(\forall x)\ x < x + y$$

и видимо да не можемо да установимо да ли је она истинита јер не знамо вредност за y. У поставци нашег задатака смо изоставили податак о валуацији $v : \mathcal{V} \to \mathbf{Z}$. Морамо знати валуацију $v : \mathcal{V} \to \mathbf{Z}$ и вредност променљиве y валуацијом v, тј. вредност $v(y)$. Изаберимо валуацију $v_1 : \mathcal{V} \to \mathbf{Z}$ која променљиву y слика у 0, $v_1(y) = 0$. Добијамо формулу $(\forall x)\ x < x+0$ и та формула је лажна. Дакле, посматрана формула је лажна у интерпретацији I_{v_1}. Али, за валуацију $v_2 : \mathcal{V} \to \mathbf{Z}$, $v_2(y) = 1$ наша формула има облик $(\forall x)\ x < x + 1$ и она је истинита, односно та формула је истинита у интерпретацији I_{v_2}. Закључујемо да за различите валуације на скупу променљивих $\mathcal{V}$, v_1 и v_2, тј. за различите вредности слободне променљиве y формуле $(\forall x)\ \alpha(x, x * y)$, имамо и различите вредности те формуле.

Природно је за сваку предикатску формулу F над неким језиком $\mathcal{J}$ издвојити оне интерпретације $(\mathcal{S}, v) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), v)$ за које је она истинита, тј. оне за које важи $I_v(F) = 1$. Такве интерпретације ћемо звати модели формуле F.

Дефиниција модела предикатске формуле

Ако је интерпретација I_v одређена структуром $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ и валуацијом v и ако за формулу F важи $I_v(F) = 1$, онда кажемо да интерпретација I_v задовољава формулу F, да је формула F истинита у интерпретацији $I_v = (\mathcal{S}, v)$ и да је $(\mathcal{S}, v)$ модел формуле F, а то записујемо: $(\mathcal{S}, v) \models F$.

У нашем Примеру 4 интерпретација $((\mathbf{Z}, 0, +, <), v_2)$ је модел посматране формуле $(\forall x)\alpha(x, x * y)$, односно $((\mathbf{Z}, 0, +, <), v_2) \models (\forall x)\alpha(x, x * y)$. Међутим, формула $(\forall x)\alpha(x, x * y)$ није истинита у интерпретацији $((\mathbf{Z}, 0, +, <), v_1)$ и за ту интерпретацију ћемо рећи да је контрамодел формуле $(\forall x)\alpha(x, x * y)$.

1.2.2 Ваљане формуле

У семантици исказне логике централно место заузимају таутологије. Подсетимо се које то својство издваја таутологије од свих других исказних формула: таутологија је истинита за било коју валуацију њених исказних слова. Својство које можемо захтевати од предикатске формула, а које личи на својство таутологија, је да та предикатска формула у одређеној структури $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ буде истинита за сваку валуацију $v : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, или још више: да је истинита за сваку интерпретацију.

Дефиниција ваљане формуле у структури $\mathcal{S}$

Ако је за неку структуру $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ формула F истинита за сваку валуацију v, тј. у свакој интерпретацији I_v са том структуром $\mathcal{S}$, важи $I_v(F) = 1$, онда кажемо да је структура $\mathcal{S}$ модел формуле F, тј. формула F је ваљана у структури $\mathcal{S}$ и пишемо $\mathcal{S} \models F$.

Пример 5 Имамо језик $\mathcal{J} = \{\circ, \alpha\}$, где је $\circ$ бинарни операцијски симбол, а α бинарни релацијски симбол. Посматрајмо предикатску формулу

$$(\forall x)(\exists y)\alpha(x, y)$$

над језиком $\mathcal{J}$ и структуру $(\mathbf{R}, +, <)$ за тај језик. За ту структуру посматрана формула је

$$(\forall x)(\exists y)x < y$$

и она је истинита за сваку валуацију $v : \mathcal{V} \to \mathbf{R}$, односно та формула је ваљана у структури $(\mathbf{R}, <)$.

Неко ће рећи: па, то је јасно да вредност ове формуле не зависи од валуација јер је она реченица и нема слободних промењљивих. Слажемо се са том примедбом и дајемо још један пример. Посматрајмо формулу

$$(\forall x)\alpha(x, x \circ y).$$

са слободном промењљивом y и структуру $\mathcal{S} = (\mathbf{N}, +, \leq)$. За ту структуру посматрана формула је:

$$(\forall x)x \leq x + y.$$

Различите валуације $v : \mathcal{V} \to \mathbf{N}$ слободну промењљиву y сликају у различите природне бројеве, дају различите интерпретације $(\mathcal{S}, v)$ и вредности посматране формуле тим интерпретацијама су мажда различите. Приметимо да произвољном валуацијом промењлива y може бити произвољан природан број d. Како за било који природан број x важи: $x \leq x+d$, где је $d \geq 0$, закључујемо да је наша формула истинита за структуру $\mathcal{S} = (\mathbf{N}, +, \leq)$ и сваку валуацију $v : \mathcal{V} \to \mathbf{N}$. Дакле, формула $(\forall x)\alpha(x, x \circ y)$ је ваљана у структури $\mathcal{S} = (\mathbf{N}, +, \leq)$ и пишемо $(\mathbf{N}, +, \leq) \models F$.

До сада смо добили формуле које су истините у некој структури $\mathcal{S}$, где је $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ за све валуације $v : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, тј. добили смо ваљане формуле у одређеној структури. Да ли можемо и нешто више од тога да тражимо? Можемо. Наиме, можемо да тражимо да формула над неким језиком $\mathcal{J}$ буде истинита у свакој структури $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$, тј. за сваку интерпретацију за тај језик. Да ли постоје такве формуле? Постоје. Ево једног примера.

Пример 6 Имамо језик $\mathcal{J} = \{\beta\}$, где је β релацијски симбол дужине 1, и посматрамо следећу формулу над тим језиком:

$$\beta(x) \vee \neg\beta(x).$$

За произвољну структуру $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, \beta_I)$ и валуацију $v : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $v(x) = d$ за неки елемент d из скупа S, горња формула је облика

$$\beta_I(d) \vee \neg\beta_I(d)$$

Елементарна формула $\beta_I(d)$ интерпретацијом $(\mathcal{S}, v)$ може имати вредност или 1 или 0. У случају да је њена вредност 1, онда је вредност формуле $\neg\beta_I(d)$ једнака 0, и обрнуто ако формула $\beta_I(d)$ има вредност 0, онда је вредност формуле $\neg\beta_I(d)$ једнака 1. Пошто је вредност формуле $\beta_I(d) \vee \neg\beta_I(d)$ једнака минимуму вредности формула $\beta_I(d)$ и $\neg\beta_I(d)$, онда у оба случаја добијамо да је њена вредност 1. Дакле, за произвољну структуру $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, \beta_I)$ и валуацију v формула $\beta(x) \vee \neg\beta(x)$ је истинита. Формуле које имају ту особину зовемо ваљане формуле.

Дефиниција ваљане формуле

Ако је предикатска формула F над језиком $\mathcal{J}$ истинита за сваку интерпретацију, онда за ту формулу кажемо да је ваљана формула и пишемо $\models F$.

Ваљане формуле имају централно место у предикатској логици исто као таутологије у исказној логици. Постоји и важнија веза између таутологија и ваљаних формула. Наиме, постоји поступак којим од таутологија правимо ваљане формуле. Одмах ћемо представити тај поступак. Погледајмо ваљану формулу из **Примера 6**. У тој ваљаној формули је сакривена, нама добро позната, таутологија $p \vee \neg p$. Ваљана формула $\beta(x) \vee \neg\beta(x)$ је добијена тако што је у таутологији $p \vee \neg p$ њено исказно слово p замењено предикатском формулом $\beta(x)$. Поставља се питање: да ли тим поступком, користећи било коју таутологију и предикатске формуле, можемо добити ваљане формуле? Одговор је: ДА. Нека је $F(p_1, ..., p_n)$ било која таутологија где су $p_1, ..., p_n$ сва исказна слова, међусобно различита, која се појављују у тој таутологији. Даље, посматрајмо произвољне међусобно различите предикатске формуле $A_1, ..., A_n$. Ако је $F(A_1, ..., A_n)$ предикатска формула која је добијена тако што смо у таутологији $F(p_1, ..., p_n)$ свако појављивање исказног слова p_i заменили предикатском формулом A_i, за свако i, $1 \leq i \leq n$, онда је та формула истинита у произвољној структури (наравно за језик $\mathcal{J}$ над којим су направљене формуле $A_1, ..., A_n$), тј. она је ваљана формула.

У **Примеру 6** таутологија $F(p)$ је исказна формула $p \vee \neg p$, предикатска формула, која замењује њено једино исказно слово p је елементарна формула $\beta(x)$, па је предикатска формула $F(\beta(x))$ баш предикатска формула $\beta(x) \vee \neg\beta(x)$ за коју смо доказали да је ваљана формула.

Посматрајући везу између исказне формуле $F(p) = p \vee \neg p$ и предикатске формуле $F(\beta(x)) = \beta(x) \vee \neg\beta(x)$ показаћемо како је повезано одређивање вредности формуле $I_v(F(p_1, ..., p_n))$ (за произвољну интерпретацију I_v исказних формула) са одређивањем вредности формуле $I_v(F(A_1, ..., A_n))$ (за произвољну интерпретацију I_v предикатских формула). Подсетимо се поступка одређивања вредности неке интерпретације $I_{\overline{v}}$ у исказној логици, и одредимо $I_{\overline{v}}(F(p)) =$

$I_{\overline{v}}(p \vee \neg p)$ за неку валуацију $\overline{v}$. Валуацијом $\overline{v}$ свако исказно слово формуле $F(p)$ (само слово p) је добило неку вредност $\overline{v}(p) = I_{\overline{v}}(p)$ и онда рачунамо $I_{\overline{v}}(F(p)) = I_{\overline{v}}(p \vee \neg p)$ на следећи начин:

$$I_{\overline{v}}(F(p)) = I_{\overline{v}}(p \vee \neg p) = max(I_{\overline{v}}(p), 1 - I_{\overline{v}}(p)).$$

Потпуно је јасно да неком другом валуацијом $\overline{\overline{v}}$ исказно слово p може имати другу вредност $\overline{\overline{v}}(p) = I_{\overline{\overline{v}}}(p)$ различиту од $\overline{v}(p) = I_{\overline{v}}(p)$, али ће $I_{\overline{\overline{v}}}(F(p))$ зависити од $I_{\overline{\overline{v}}}(p)$ по истом закону: максимум вредности $I_{\overline{\overline{v}}}(p)$ и $1 - I_{\overline{\overline{v}}}(p)$.

Стога ту зависност можемо представити као једну функцију

$$I_{\overline{v}}(F(p)) = \overline{h}(I_{\overline{v}}(p)), \text{ где је } \overline{h}(\mathrm{z}) = max(\mathrm{z}, 1 - \mathrm{z}).$$

за произвољну валуацију $\overline{v}$. Вратимо се у предикатску логику и одредимо $I_v(F(\beta(x))) = I_v(\beta(x) \vee \neg\beta(x))$ за неку интерпретацију I_v. Интерпретацијом I_v потформула $\beta(x)$ има своју вредност $I_v(\beta(x))$, и вредност рачунамо $I_v(F(\beta(x))) = I_v(\beta(x) \vee \neg\beta(x))$ на следећи начин:

$$I_v(F(\beta(x))) = I_v(\beta(x) \vee \neg\beta(x)) = max(I_v(\beta(x)), 1 - I_v(\beta(x)))$$

Неком другом интерпретацијуом I_{v_1} вредност формуле $\beta(x)$, $I_{v_1}(\beta(x))$, ће можда бити различита од $I_v(\beta(x))$, али ће се вредност $I_{v_1}(\beta(x) \vee \neg\beta(x))$ рачунати у зависити од $I_{v_1}(\beta(x))$ по истом закону као у интерпретацији I_v:

$$I_{v_1}(\beta(x) \vee \neg\beta(x)) = h(I_{v_1}(\beta(x)), \text{ где је } h(\mathrm{z}) = max(\mathrm{z}, 1 - \mathrm{z}).$$

Погледајмо функцију $\overline{h}$ која описује зависност $I_{\overline{v}}(F(p))$ од $I_{\overline{v}}(p)$ и функцију h која описује зависност $I_v(F(\beta(x)))$ од $I_v(\beta(x))$. Те две функције описују исти закон, тј. важи

$$I_{\overline{v}}(F(p)) = h(I_{\overline{v}}(p)) \qquad \text{и} \qquad I_v(F(\beta(x))) = h(I_v(\beta(x))),$$

где је $h(\mathrm{z}) = max(\mathrm{z}, 1 - \mathrm{z})$ и $I_{\overline{v}}$ произвољна интерпретација исказних, а I_v произвољна интерпретација предикатских формула.

Ова особина важи и за произвољну исказну формулу $F(p_1, ..., p_n)$ и предикатску формулу $F(A_1, ..., A_n)$ добијену из те исказне формуле на горе описан начин. Наиме, истом функцијом је описана зависност $I_v(F(A_1, ..., A_n))$ од вредности $I_v(A_1), ..., I_v(A_n)$ (за било коју интерпретацију I_v предикатских формула) и зависност $I_{\overline{v}}(F(p_1, ..., p_n))$ од вредности $I_{\overline{v}}(p_1), ..., I_{\overline{v}}(p_n)$ (за било коју интерпретацију $I_{\overline{v}}$ исказних формула), тј. та зависност је описана неком функцијом h:

$$I_v(F(A_1, ..., A_n)) = h(I_v(A_1), ..., I_v(A_n))$$

и

$$I_{\overline{v}}(F(p_1, ..., p_n)) = h(I_{\overline{v}}(p_1), ..., I_{\overline{v}}(p_n)).$$

Ову особину ћемо користити у доказу следеће теореме.

ТЕОРЕМА 1

Ако је формула $F(p_1, ..., p_n)$ таутологија и A_1,..., A_n предикатске формуле, онда је формула $F(A_1, ..., A_n)$ ваљана формула.

ДОКАЗ

Потребно је показати да за сваку интерпретацију $I_v(\mathcal{S}, v) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), v)$ вредност формуле $F(A_1, ..., A_n)$ је 1.

Сваком интерпретацијом $I_v(\mathcal{S}, v) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), v)$ формуле A_1,..., A_n добијају вредности $I_v(A_1)$,..., $I_v(A_n)$ и дефиниција интерпретације даје функцију h која описује зависност $I_v(F(A_1, ..., A_n))$ од $I_v(A_1)$,..., $I_v(A_n)$, тј.

$$I_v(F(A_1, ..., A_n)) = h(I_v(A_1), ..., I_v(A_n)).$$

Селимо се у исказну логику и тамо посматрамо формулу $F(p_1, .., p_n)$ и једну валуацију $\overline{v}$ њених исказних слова за коју важи да је:

$\overline{v}(p_i) = I_{\overline{v}}(p_i)$ једнако $I_v(A_i)$, за $1 \leq i \leq n$.

Имамо да $I_{\overline{v}}(F(p_1, ..., p_n))$ зависи од $\overline{v}(p_1) = I_{\overline{v}}(p_1)$, ..., $\overline{v}(p_n) = I_{\overline{v}}(p_n)$ по истој функцији h као $I_v(F(A_1, ..., A_n))$ од $I_v(A_1)$, ..., $I_v(A_n)$, тј.

$$I_{\overline{v}}(F(p_1, ..., p_n)) = h(I_{\overline{v}}(p_1), ..., I_{\overline{v}}(p_n)).$$

Како је формула $F(p_1, .., p_n)$ таутологија она је истинита за сваку валуацију својих исказних слова $p_1, ..., p_n$, па и за валуацију $\overline{v}$. Дакле,

$$I_{\overline{v}}(F(p_1, ..., p_n)) = h(I_{\overline{v}}(p_1), ..., I_{\overline{v}}(p_n)) = 1.$$

А сада, користећи све горње особине, рачунамо $I_{v_1}(F(A_1, ..., A_n))$:

$$\begin{aligned} I_v(F(A_1, ..., A_n)) &= h(I_v(A_1), ..., I_v(A_n)) \\ &= h(I_{\overline{v}}(p_1), ..., I_{\overline{v}}(p_n)), \text{ због } I_{\overline{v}}(p_i) = I_v(A_i),\ 1 \leq i \leq n \\ &= I_{\overline{v}}(F(p_1, ..., p_n)) = 1. \end{aligned}$$

Дакле, за сваку интерпретацију I_v вредност формуле $F(A_1, ..., A_n)$ је 1. Стога, $F(A_1, ..., A_n)$ је ваљана формула.

$\diamondsuit$

Наставимо са повезивањем особина исказних и предикатских формула. Подсетимо се да је у исказној логици правило modus ponens (MP) од таутологија A и $A \Rightarrow B$ производи таутологију B (ТЕОРЕМА -*T-MP*). У предикатској логици правило modus ponens ће од ваљаних формула A и $A \Rightarrow B$ производи ваљану формулу B. То је доказано у наредној теореми, коју ћемо назвати ТЕОРЕМА -*V-MP*, где нас V подсећа на ваљане формуле, а MP на правило modus ponens.

ТЕОРЕМА 2 (ТЕОРЕМА-*V-MP*)

Ако су формуле A и $A \Rightarrow B$ ваљане формуле, тј. $\models A$ и $\models A \Rightarrow B$, онда је и формула B ваљана формула, тј. $\models B$.

ДОКАЗ

Формуле A и $A \Rightarrow B$ су ваљане формуле, стога за сваку интерпретацију I_v, $I_v = (\mathcal{S}, v)$, важи да је $I_v(A) = 1$ и $I_v(A \Rightarrow B) = 1$. С друге стране, по дефиницији I_v имамо:

$I_v(A \Rightarrow B) = max(1 - I_v(A), I_v(B)) = max(1 - 1, I_v(B)) = max(0, I_v(B)) = I_v(B)$.

Дакле, добијамо да је $I_v(B)$ једнако 1 за сваку интерпретацију $I_v = (\mathcal{S}, v)$, тј. формула B је ваљана формула.

$\diamondsuit$

У предикатској логици осим правила MP имамо још једно правило које од једне ваљане формуле прави нову. То је правило генерализације (Gen) које од ваљане формуле A производи ваљану формулу $(\forall x)A$.

ТЕОРЕМА 3 (ТЕОРЕМА-*Gen*) Ако је формула A ваљана формула, тј. $\models A$, онда је и $(\forall x)A$ ваљана формула, тј. $\models (\forall x)A$.

ДОКАЗ
Формула A је ваљана формула, па имамо да за сваку интерпретацију I_v, где је $I_v = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), v)$, важи да је $I_v(A) = 1$.
С друге стране, по дефиницији I_v имамо: $I_v((\forall x)A) = max\{I_v(A^x_d) : d \in \mathrm{S}\}$.
Постоје две могућности:
(1) ако $x \in SP(A)$, онда се вредност $I_v(A^x_d)$ мења у зависности од тога који елемент d из S замењује x. Како је A ваљана формула, имамо да је вредност формуле A^x_d једнака 1 за свако d из S. Дакле, $\{I_v(A^x_d) : d \in \mathrm{S}\} = \{1\}$, па је $max\{I_v(A^x_d) : d \in \mathrm{S}\} = 1$, тј. формула $(\forall x)A$ је ваљана формула.
(2) ако $x \notin SP(A)$, онда је једноставно $I_v((\forall x)A) = I_v(A)$. Дакле, формула $(\forall x)A$ је ваљана формула.

$\diamond$

У исказној логици изучавали смо еквивалентне исказне формуле, а сада ћемо се позабавати еквивалентним предикатским формулама.

Дефиниција еквивалентних предикатских формула

Две предикатске формуле A и B над неким језиком $\mathcal{J}$ су семантички еквивалентне (или краће, еквивалентне) ако је формула $A \Leftrightarrow B$ ваљана, тј. $\models A \Leftrightarrow B$.

Задатак 1 Покажимо следеће својство еквивалентних формула: формуле A и B су еквивалентне ако и само ако за за сваку структуру $\mathcal{S}$ и интерпретацију $I_v = (\mathcal{S}, v)$ важи: $I_v(A) = I_v(B)$.
Претпоставимо да су формуле A и B еквивалентне. То значи да је формула $A \Leftrightarrow B$ ваљана, тј. $\models A \Leftrightarrow B$. То значи да за сваку структуру $\mathcal{S}$ и интерпретацију $I_v = (\mathcal{S}, v)$ важи $I_v(A \Leftrightarrow B) = 1$. По дефиницији интерпретације I_v за формулу облика $A \Leftrightarrow B$ вредност $I_v(A \Leftrightarrow B) = 1$ значи да је $I_v(A)$ једнако $I_v(B)$: $I_v(A) = I_v(B)$.
С друге стране, ако за сваку структуру $\mathcal{S}$ и интерпретацију $I_v = (\mathcal{S}, v)$ важи $I_v(A) = I_v(B)$, онда по дефиницији интерпретације I_v имамо: $I_v(A \Leftrightarrow B) = 1$. Дакле, формула $A \Leftrightarrow B$ је ваљана, односно формуле A и B су еквивалентне.

Бинарна релација "формуле A и B су еквивалентне" на скупу свих предикатских формула над неким језиком $\mathcal{J}$ је једна релација еквиваленције на том скупу. Као и у исказној логици можемо дефинисати бинарну релацију на том скупу, релацију $\equiv$:

$A \equiv B$ АККО формуле A и B су еквивалентне.

Доказује се, аналогно као и у исказном случају, да је $\equiv$ једна релација еквиваленције на скупу предикатских формула над тим језиком $\mathcal{J}$.

Задатак 2 Покажимо једно својство ваљаних формула, које ће бити веома често коришћено у наредном раду, а које је последица транзитивности еквивалентности формула:

ако је $\models A \Leftrightarrow B$ и $\models B \Leftrightarrow C$, онда је $\models A \Leftrightarrow C$.

Из $\models A \Leftrightarrow B$ и $\models B \Leftrightarrow C$, на основу дефиниције $\equiv$ имамо редом $A \equiv B$ и $B \equiv C$. Стога, на основу транзитивности $\equiv$ добијамо $A \equiv C$, односно $\models A \Leftrightarrow C$.

У наредној теореми ћемо показати још неке важне особине које имају еквивалентне предикатске формуле.

ТЕОРЕМА 4 Нека су A и B предикатске формуле над језиком $\mathcal{J}$.
(1) Ако је $\models A \Leftrightarrow B$, онда је $\models \neg A \Leftrightarrow \neg B$.
(2) Ако је $\models A \Leftrightarrow B$, онда за произвољну предикатску формулу C над $\mathcal{J}$ важи:

($\wedge$1) $\models (C \wedge A) \Leftrightarrow (C \wedge B)$ и ($\wedge$2) $\models (A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)$;
($\vee$1) $\models (C \vee A) \Leftrightarrow (C \vee B)$ и ($\vee$2) $\models (A \vee C) \Leftrightarrow (B \vee C)$;
($\Rightarrow$1) $\models (C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$ и ($\Rightarrow$2) $\models (A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$;
($\Leftrightarrow$1) $\models (C \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow (C \Leftrightarrow B)$ и ($\Leftrightarrow$2) $\models (A \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$.

(3) Ако је $\models A \Leftrightarrow B$, онда је $\models (\forall x)A \Leftrightarrow (\forall x)B$.
(4) Ако је $\models A \Leftrightarrow B$, онда је $\models (\exists x)A \Leftrightarrow (\exists x)B$.

ДОКАЗ

Делови (1) и (2) доказују се аналогно као делови (1) и (2) ЛЕМЕ О ЗАМЕНИ ЕКВИВАЛЕНАТА у исказној логици.
(3) Из $\models A \Leftrightarrow B$ имамо еквивалентност формула A и B, тј. за сваку интерпретацију I_v важи: $I_v(A) = I_v(B)$. Покажимо да за сваку интерпретацију I_v са структуром $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ да важи $I_v(\forall xA) = I_v(\forall xB)$. На основу дефиниције I_v вредност $I_v(\forall xA)$ је једнака $min\{I_v(A^x_d) : d \in \mathrm{S}\}$. Даље, из $I_v(A^x_d) = I_v(B^x_d)$ имамо да је $min\{I_v(A^x_d) : d \in \mathrm{S}\}$ једнако $min\{I_v(B^x_d) : d \in \mathrm{S}\}$, а ово је, по дефиницији I_v, вредност $I_v(\forall xB)$. Дакле, за сваку интерпретацију I_v важи: $I_v(\forall xA) = I_v(\forall xB)$. Стога су формуле $\forall xA$ и $\forall xB$ еквивалентне, тј. формула $(\forall x)A \Leftrightarrow (\forall x)B$ је ваљана.
(4) Доказује се на исти начин као део (3).

$\diamondsuit$

Задатак 3 Покажимо да су формуле

$$\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A$$
$$\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$$

ваљане. Ове формуле се називају Де Органови закони за квантификаторе. Докажимо да је прва формула ваљана, односно

$$\models \neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A.$$

Према дефиницији ваљане формуле потребно је доказати да је ова формула истинита у свакој интерпретацији. Пошто је посматрана формула облика $C \Leftrightarrow D$, довољно је доказати да је формула $\neg(\forall x)A$ истинита ако и само ако је истинита формула $(\exists x)\neg A$. Посматрамо произвољну интерпретацију I_v и њен носач S. Имамо два случаја у зависности од вредности $I_v(\neg(\forall x)A)$. Ако је $I_v(\neg(\forall x)A) = 0$, онда је $I_v((\forall x)A) = 1$. Како је, на основу дефиниције I_v, вредност $I_v(\forall xA)$ једнака $min\{I_v(A^x_d) : d \in \mathrm{S}\}$, имамо да је $I_v(A^x_d) = 1$ за свако d из скупа S. Стога $I_v(\neg A^x_d) = 0$ за свако d из скупа S. Дакле,

$max\{I_v(\neg A_d^x) : d \in \mathrm{S}\} = 0$, тј. $I_v((\exists x)\neg A) = 0$. Други случај је када је $I_v(\neg(\forall x)A) = 1$, па је $I_v((\forall x)A) = 0$. Како је, на основу дефиниције I_v, вредност $I_v(\forall x A)$ једнака $min\{I_v(A_d^x) : d \in \mathrm{S}\}$ имамо да постоји неко d_0 из скупа S за које важи $I_v(A_{d_0}^x) = 0$. Стога $I_v(\neg A_{d_0}^x) = 1$. Дакле, $max\{I_v(A_d^x) : d \in \mathrm{S}\} = 1$, тј. $I_v((\exists x)\neg A) = 1$. У оба случаја смо добили да је $I_v(\neg(\forall x)A) = I_v((\exists x)\neg A)$. То значи, на основу дефиниције интерпретације, да за сваку интерпретацију I_v важи: $I_v(\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A) = 1$. Стога су формуле $\neg(\forall x)A$ и $(\exists x)\neg A$ еквивалентне, тј. формула $\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A$ је ваљана.

Истакнимо да горње закључивање није зависило од облика формуле A, па смо доказом да је посматрана формула ваљана доказали ваљаност бесконачно много формула, тако што потформула A формуле $\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A$ може бити било која формула. Зато, ако у ту ваљану формулу на месту формуле A ставимо формулу $\neg A$ добијамо нову ваљану формулу:

$$\models \neg(\forall x)\neg A \Leftrightarrow (\exists x)\neg\neg A \qquad (*)$$

Из таутологије $F(p) : \neg\neg p \Leftrightarrow p$ и предикатске формуле A, на основу ТЕОРЕМЕ 1 формула $F(A) = \neg\neg A \Leftrightarrow A$ је ваљана. Стога, на основу дела (4) ТЕОРЕМЕ 4, формула $((\exists x)\neg\neg A) \Leftrightarrow (\exists x)A$ је ваљана:

$$\models ((\exists x)\neg\neg A) \Leftrightarrow (\exists x)A \qquad (**)$$

Из $(*)$ и $(**)$ на основу **Задатка 3** добијамо:

$$\models \neg(\forall x)\neg A) \Leftrightarrow (\exists x)A$$

тј. формула $\neg(\forall x)\neg A \Leftrightarrow (\exists x)A$ је ваљана.

Ваљаност формуле $\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$ ћемо доказати користећи ваљану формулу $\neg(\forall x)\neg A \Leftrightarrow (\exists x)A$ и ТЕОРЕМУ 1. Ако у таутологији $(\neg p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Leftrightarrow p)$ њено исказно слово p заменимо формулом $(\forall x)\neg A$, а исказно слово q формулом $(\exists x)A$, на основу ТЕОРЕМЕ 1 добијамо ваљану формулу:

$$(\neg(\forall x)\neg A \Leftrightarrow (\exists x)A) \Leftrightarrow (\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A)$$

Дакле, за сваку иинтерпретацују I_v важи

$$I_v((\neg(\forall x)\neg A \Leftrightarrow (\exists x)A) \Leftrightarrow (\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A)) = 1.$$

То, по дефиницији I_v, значи

$$I_v((\neg(\forall x)\neg A) \Leftrightarrow (\exists x)A) = I_v((\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A)).$$

За формулу $\neg(\forall x)\neg A \Leftrightarrow (\exists x)A$ смо показали да је ваљана, па важи $I_v((\neg(\forall x)\neg A) \Leftrightarrow (\exists x)A) = 1$. Дакле,

$$I_v((\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A)) = 1,$$

тј. формула $\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$ је ваљана.

Ваљане формуле из претходног примера нам показују да се један од квантификатора $\forall$ и $\exists$ може дефинисати помоћу оног другог. Наиме, ако изаберемо универзални квантификатор као основни, онда егзистенцијални квантификатор дефинишемо на следећи начин:

$$(\exists x)A =_{def} \neg(\forall x)\neg A$$

Ако изаберемо егзистенцијални квантификатор као основни, онда универзални квантификатор дефинишемо на следећи начин:

$$(\forall x)A =_{def} \neg(\exists x)\neg A$$

Задатак 4 Погледајмо формулу

$$(\forall x)A \Rightarrow A^x_t,$$

где је формула A^x_t добијена заменом променљиве x произвољним термом t. Питамо се: да ли је ова формула ваљана? Формулу читамо: ако је тачно A за све x, онда је тачно и A^x_t која је добијена из A тако што је променљива x замењена неким термом t. Питамо се: да ли то важи за сваку интерпретацију? Одговор је: НЕ. Ево примера.

Посматрајмо формулу

$$(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) \Rightarrow (\exists y)\alpha(y,y).$$

над неким језиком $\mathcal{J} = \{\alpha\}$, где је α бинарни релацијски симбол. Та формула је пример формуле $(\forall x)A \Rightarrow A^x_t$, где је A формула $(\exists y)\alpha(x,y)$, терм t је y, па је A^x_t формула $(\exists y)\alpha(y,y)$. Да ли је формула $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) \Rightarrow (\exists y)\alpha(y,y)$ ваљана? Одговор је: НЕ. Докажимо то тако што ћемо направити један контрамодел $(\mathcal{S}, v)$ за ту формулу, односно једну интерпретацију у којој ће та формула бити лажна. На пример, за структуру $\mathcal{S} = (\mathbf{N}, <)$ посматрана формула је

$$((\forall x)(\exists y)\ x < y) \Rightarrow ((\exists y)\ y < y)$$

и она је лажна.

Погледајмо пажљивије нашу замену променљиве x термом y у формули $(\exists y)\alpha(x,y)$. То није исправна замена, јер променљива y терма y постаје везана у формули

$$(\exists y)\alpha(x,y)^x_y = (\exists y)\alpha(y,y).$$

Питамо се: ако је замена x термом t исправна, да ли је тада формула $(\forall x)A \Rightarrow A^x_t$ ваљана? Одговор је: ДА. Сада ћемо то и доказати. Посматрајмо произвољну структуру $\mathcal{S} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ и произвољну валуацију v. Треба показати да је

$$I_v((\forall x)A \Rightarrow A^x_t) = 1.$$

Имамо два случаја у зависности од вредности $I_v((\forall x)A)$. Ако је $I_v((\forall x)A(x)) = 0$, онда

$$\begin{aligned} I_v((\forall x)A \Rightarrow A(t)) &= max(1 - I_v((\forall x)A), I_v(A(t))) \\ &= max(1 - 0, I_v(A^x_t)) \\ &= max(1, I_v(A^x_t)) = 1. \end{aligned}$$

Интересантнији случај је ако је вредност $I_v((\forall x)A)$ једнака 1. Тада имамо

$$I_v((\forall x)A \Rightarrow A(t)) = max(1 - I_v((\forall x)A), I_v(A(t)))$$

$$= max(0, I_v(A_t^x)) = I_v(A_t^x).$$

Остаје нам да докажемо да је онда и вредност $I_v(A_t^x)$ једнака 1 ако је замена x са t исправна. Из $I_v((\forall x)A) = 1$ имамо да је $I_v(A_d^x) = 1$ за свако d из S. Интерпретацијом I_v терм t добија неку вредност d_0, $I_v(t) = d_0$, где је d_0 неки елемент носача S. Пошто је замена x термом t у A исправна, онда у формули A_t^x све променљиве терма t остају слободне, тј. не долазе под дејство ниједног квантификатора. Стога, при рачунању $I_v(A_t^x)$ вредност $I_v(t)$ ће бити d_0 и терм t у формули A_t^x стоји на месту променљиве x. Дакле, $I_v(A_t^x)$ је једнако $I_v(A_{d_0}^x)$, а та вредност је једнака 1 јер је $I_v(A_d^x)$ једнако 1 за свако d из S, па и за d_0.

У оба случаја смо добили да је $I_v((\forall x)A \Rightarrow A_t^x) = 1$, па закључујемо да формула $(\forall x)A \Rightarrow A_t^x$, где је замена x термом t исправна, јесте ваљана формула.

Користећи ову ваљану формулу, де Морганове законе за квантификаторе из Задатка 3 и ТЕОРЕМУ 1, добијамо још једну ваљану формулу:

$$A_t^x \Rightarrow (\exists x)A,$$

где је у формули A замена x термом t исправна.

1.3 Предикатска логика као формална теорија

У овом делу ћемо се вратити формалним теоријама. Као што смо урадили са исказном логиком и предикатску логику ћемо представити као једну формалну теорију. За то ће нам послужити формални систем $\mathcal{N}$ и формални систем $\mathcal{L}$ којима смо представили исказну логику. Наиме, дефинисаћемо формални систем предикатске логике $\mathcal{NK}$ и формални систем предикатске логике $\mathcal{K}$ који ће бити на неки начин надградња редом система $\mathcal{N}$ и $\mathcal{L}$. За системе $\mathcal{NK}$ и $\mathcal{K}$ ћемо показати да су еквивалентни. Осим тога, показаћемо да како у исказној логици важи да је исказна формула таутологија ако и само ако је теорема, тако у предикатској логици важи: предикатска формула F је ваљана формула АККО је F теорема у предикатској логици.

1.3.1 Правила за квантификаторе природне дедукције

Већ смо се упознали са правилима природне дедукције за логичке везнике. Сада ћемо представити правила и за квантификаторе. Заједно, правила за везнике и правила за квантификаторе чине природну дедукцију за предикат ску логику. Као што за сваки везник, тако и за ваки квантификатор ($\forall$ и $\exists$) постоји правило увођења и правило елиминације.

1. **Правила за увођење и елиминацију квантификатора $\forall$**