[1] Formalni jezik iskazne logike

Svaka formalna teorija (formalni sistem) sastoji se iz tri komponente:

- formalnog jezika,
- aksioma i
- pravila izvođenja (zaključivanja)

Formalni jezik [4] sastoji se iz osnovnih simbola i formula.

Pod **osnovnim simbolom** u nekom formalnom jeziku podrazumevamo simbol koji je celina i čije delove ne koristimo kao simbole u tom jeziku. Skup osnovnih simbola nekog formalnog jezika obično se zadaje nabrajanjem. Ovaj skup se često naziva i **azbukom (alfabetom)** formalnog jezika.

Za osnovne simbole formalnog jezika iskazne logike mogu se uzeti:

- iskazne promenljive (iskazna slova): p, q, r, p_1, q_1, r_1 ....
- iskazna konstanta ⊥,
- logičke **veznici [2]**. ∧, ∨, ⇒,
- interpunkcijski simboli: (,).

Konačni niz simbola zove se reč. Svaki simbol je, dakle, ujedno i reč. Reč može biti i prazna; tada ne sadrži nijedan simbol. Skup svih reči je opštiji pojam od jezika, tj. formalni jezik je podskup skupa svih reči napravljenih od osnovnioh simbola. Reči koje pripadaju jeziku zovu se **formule**.

Formule nekog formalnog jezika zadaju se tzv. **induktivnim (ili rekurzivnim) definicijama [3]**, koje predstavljaju skupove pravila po kojima se formule grade.

Skup svih formula iskazne logike (iskaznih formula) može se definisati na sledeći način:

(a) Iskazne promenljive i iskazna konstanta ⊥ su iskazne formule.

(b) Ako su A i B iskazne formule, onda su i (A∧B), (A∨B) i (A⇒B) iskazne formule.

Ovde treba zapaziti da, npr., (A∧B) nije iskazna formula; to je tzv. shema-formula.

Takođe treba zapaziti da, prema navedenim definicijama, iskaznih promenljivih ima prebrojivo mnogo i da je svaka iskazna formula konačni niz simbola. Ove pretpostavke imaju suštinsku ulogu u razmatranju odlučivosti **iskazne logike [8]**.

Iskazne promenljive i iskazna konstanta⊥posmatrane kao formule, zovu se **atomske (elementarne) formule**.

Skup svih potformula neke iskazne formule A definišemo sledećom induktivnom definicijom:

(a) Formula A je potformula formule A.

(b_1) Ako je (B∧C,) potformula formule A1 onda su i formule B i C potformule formule A.

(b_2) Ako je (B∨C) potformula formule A, onda su i formule B i C potformule formule A.

(b_3) Ako je (B⇒C) potformula formule A, onda su i formule B i C potformule formule A.

[O drvetu formule 23 ; Kron, str. 13-14.]

Formalni jezik je potpuno određen kada su određeni njegovi osnovni simboli | formule. Da bi se izlaganje neke formalne teorije učinilo jednostavnijim, često se posebnim **definicijama [21]** u jezik uvode i drugi simboli (osim osnovnih).

Tako se, npr., logički veznici ¬ i ⇒ i iskazna konstanta ⊤ mogu definisati na sledeći način:

Neka su A i B iskazne formule; tada:

- ¬A je zamena za: (A⇒⊥),
- (A⇔B) je zamena za: ((A⇒B)∧(B⇒A)),
- ⊤ je zamena za: ¬⊥ .

Radi poboljšanja čitljivosti iskaznih formula, često se usvajaju određene konvencije u njihovom pisanju (npr. konvencija o brisanju spoljnih zagrada).

[O instancama neke shema-formule; predavanja, 24.11. 2003.]

[O poljskoj notaciji; predavanja, 24. 11. 2003; Kron. str. 12.]

Skup svih **aksioma** neke formalne teorije je određeni podskup skupa svih formula te teorije.

Navodimo jedan mogući skup aksioma iskazne logike:

- A ⇒ (B⇒A)
- (A⇒(B⇒C)) ⇒ ((A⇒B)⇒(A⇒C))
- ((A⇒B)⇒A) ⇒ A
- (A∧B)⇒ A
- (A∧B) ⇒ B
- (C⇒A)⇒((C⇒B)⇒(C⇒(A∧B)))
- A⇒(A∨B)
- B⇒(A∨B)
- (A⇒C)⇒((B⇒C)⇒((A∨B)⇒C))
- ⊥⇒A

Ovo su tzv. shema-aksiome, jer A, B i C mogu biti bilo koje iskazne formule.

Pravila izvođenja (zaključivanja) omogućavaju da se iz izvesnih formula teorije (koje se zovu premise pod određenim uslovima izvede neka druga formula (koja se zove zaključak pravila).

Kao jedino pravilo izvođenja iskazne logike uzima se tzv. modus ponens:

$$\frac{A \quad A\Rightarrow B}{B}$$

Skup svih **teorema [34]** iskazne logike definišemo sledećom induktivnom definicijom:

(a) sve aksiome iskazne logike su teoreme,
(b) ako su premise modusa ponens teoreme iskazne logike, onda je teorema i zaključak toga pravila izvođenja.

Činjenicu da je formula A teorema iskazne logike označavamo sa: ⊢ A.

Pod dokazom (ili **dedukcijom [34]**, izvođenjem) formule A u iskaznoj logici

podrazumevamo konačan niz iskaznih formula na čijem kraju je A, pri čemu je svaka formula niza ili aksioma ili zaključak koji proizilazi po modusu ponens iz neke dve prethodne formule niza.

Može se pokazati da je neka formula A teorema iskazne logike ako i samo ako postoji bar jedan dokaz formule A u iskaznoj logici.

Neka je G neki skup iskaznih formula. Pod dokazom formule A iz hipoteza skupa G podrazumevamo konačan niz iskaznih formula na čijem kraju je A, pri čemu je svaka formula niza ili aksioma ili formula iz skupa G ili zaključak koji proizilazi po modusu ponens iz neke dve prethodne formule niza.

Formulu A tada zovemo **posledica** (ili **sintaktička posledlca**) skupa formula G (u oznaci G⊢A), a formule skupa zovemo **hipoteze** (ili **pretpostavke**).

Formalni jezik iskazne logike

- predavanja, 17. i 24. 11. 2003.
- Kron, str. 3-4, 9-13
- Prešić, str. 75-77

[3] Induktivne definicije

U logici i matematici od velikog značaja je jedna posebna vrsta **definicija [21]**; to su **induktivne definicije**, koje se još nazivaju i **rekurzivne definicije**. Ovim definicijama se, npr., određuju formule nekog **formalnog jezika [1]**.

Struktura induktivnih definicija može se opisati na sledeći način:

> Pretpostavimo da pomoću induktivne definicije želimo da definišemo skup *X* nekih objekata. Definicija se sastoji od jednog skupa pravila od kojih svako određuje da pod izvesnim pretpostavkama neki objekat *x* pripada skupu *X* pri tome, neke od tih pretpostavki mogu tvrditi da se neki objekti, koji su sa objektom *x* povezani na izvestan način, već nalaze u skupu *X*.
>
> Kada se skup *X* definise ovom vrstom definicija, pretpostavlja se da je neki objekat element skupa *X* ako i samo ako ta činjenica proizilazi iz pravila koja čine induktivnu definciju.
>
> > Npr., induktivnom definicijom se može definisati skup ***N*** svih prirodnih brojeva 0, 1, 2... . Pretpostavimo da su već definisani broj 0 i pojam sledbenika nekog prirodnog broja (kao sledeći prirodan broj). Tada induktivna definicija skupa ***N*** izgleda ovako:
> >
> > 1. 0 je prirodan broj.
> > 2. Ako je *x* prirodan broj, onda je to i sledbenik broja *x*.
> >
> > Skup svih formula iskazne logike, (iskaznih formula) može se definisati induktivnom definicijom na sledeći način:
> >
> > 1. Iskazne promenljive i iskazna konstanta 1 su iskazne formule.
> > 2. Ako su A i B iskazne formule, onda su i (A∧B), (A∨B) i (A⇒B) iskazne formule.
> >
> > (Ovde treba zapaziti da, npr., (A∧B) nije iskazna formula; to je tzv. shema- formula.)

Precizan opis induktivne definicije izgleda ovako:

> Neka je *Y* skup i neka je Y_0 njegov podskup, tj. $Y_0 \subseteq Y$. Neka su f_1,.... f_k operacije skupa *Y* čije su dužine redom n_1, ... n_k. Neka je *X* podskup skupa *Y* za koji važi: $x \in X$ ako i samo ako postoji niz x_0, ... , x_m elemenata skupa *Y* sa sledećom osobinom: x_m= x i za sve i≤m ili je xj ∈ Y_0 ili je $x_j = f_j(x_{j_1}, \dots , x_{j_{nj}})$ za neko $1 \leq j \leq k$ i neke i_1, ... $i_k < i$.
>
> Tada kažemo da je skup X definisan sledećom induktivnom definicijom:
>
> 1. Ako je $x \in Y_0$, onda je $x \in X$.
> 2. Ako je $1 \leq j \leq k$ i $x_1, \dots , x_{nj} \in X$, onda je $f_j(x_1, \dots , x_{n_j}) \in X$.

Za skupove koji su definisani induktivnim definicijama, neke teoreme mogu se dokazivati indukcijom. Pretpostavimo da je *X* skup definisan induktivnom definicijom. Da bi se dokazalo da svaki njegov element ima određeno svojstvo *P*, dovoljno je dokazati da objekti koji zadovoljavaju pravila definicije imaju svojstvo *P*. Za takav dokaz se kaže da je izveden indukcijom po elementima skupa *X*. U takvom dokazu, pretpostavke u pravilima induktivne definicije da neki objekti pripadaju skupu *X* postaju pretpostavke da izvesni objekti imaju svojstvo *P* i zovu se indukcijske hipoteze (pretpostavke).

U specijalnom slučaju, kada za skup *X* uzmemo skup ***N*** svih prirodnih brojeva (tj. kada dokazujemo da svi prirodni brojevi imaju neko svojstvo *P*), dokaz se svodi na dokaz **matematičkom indukcijom [25]**.

Induktivne definicije

- Kron, str. 4-5 ♦ str. 4-5
- van Dalen, str. 200-202
- Prešić, str. 68

[4] Formalni jezik

Matematička tvrđenja izražavamo **prirodnim jezikom** (srpski, engleski, ruski...), koji se, po potrebi, proširuje određenom matematičkom terminologijom i simbolikom. Međutim, prirodni jezik ima nedostatke kao što su nedovoljno precizna i ponekad protivurečna struktura, dvosmislenost i sl. Zbog toga je za izučavanje matematičkih tvrđenja neophodan **formalni jezik**, odnosno takav jezik čija je struktura potpuno regularna.

Formalni jezik se sastoji iz osnovnih simbola i formula.

Pod **osnovnim simbolom** u nekom formalnom jeziku podrazumevamo simbol koji je celina i čije delove ne koristimo kao simbole u tom jeziku. Skup osnovnih simbola nekog formalnog jezika obično se zadaje nabrajanjem. Ovaj skup se često naziva i **azbukom (alfabetom)** formalnog jezika.

Npr., za osnovne simbole formalnog jezika iskazne logike [1] mogu se uzeti:

- iskazne promenljive (iskazna slova): p, q, r, p_1, q_1, r_1 ...,
- iskazna konstanta ⊥,
- logički **veznici [2]**: ∧, ∨, ⇒,
- interpunkcijski simboli: (i).

Za osnovne simbole formalnog jezika predikatske logike (ili **jezika prvoga reda [17]**) mogu se uzeti:

- individualne promenljive: x, y, z, x_1, y_1, z_1,... ,
- individualne konstante: a, b, c, a_1, b_1, c_1, ...,0, 1, ... ,
- operacisjki (funkcionalni) simboli: f, g, ..., +, *,... ,
- relacijski (predikatski) simboli: R, R_1, ... , =, <, ... ,
- logički veznici: ∧, ∨, ⇒, ⊥
- kvantifikatorski prefiksi: ∀, ∃,
- pomoćni simboli: zagrade i zapeta.

Poseban primer formalnih jezika predstavljaju programski jezici (BASIC, PASCAL, C...) kojima se pišu računarski programi.

Konačni niz simbola zove se **reč**. Svaki simbol je, dakle, ujedno i reč. Reč može biti i prazna; tada ne sadrži nijedan simbol. Skup svih reči je opštiji pojam od jezika, tj. formalni jezik je podskup skupa svih reči napravljenih od osnovnioh simbola. Reči koje pripadaju jeziku zovu se **formule**.

Formule nekog formalnog jezika zadaju se tzv. **induktivnim** (ili **rekurzivnim**) **definicijama [3]**, koje predstavljaju skupove pravila po kojima se formule grade.

Npr., skup svih formula iskazne logike (iskaznih formula) može se definisati na sledeći način:

(a) Iskazne promenljive i iskazna konstanta 1 su iskazne formule.
(b) Ako su A i B iskazne formule, onda su i (A∧B), (A∨B) i (A⇒B) iskazne formule.

(Ovde treba zapaziti da, npr., (A∧B) nije iskazna formula; to je tzv. shema-formula.)

Skup svih formula predikatske logike definiše se tako što se prvo definišu termi (koji se grade od individualnih promenljivih, individualnih konstanti i operacijskih simbola) i atomske formule (koje se grade od terma i relacijskih simbola). Formule se zatim grade od atomskih formula, logičkih simbola i kvantifikatora.

Određenje formalnog jezika je prvi korak u izgradnji neke **formalne teorije** (**formalnog sistema**). Ostale komponente formalne teorije su: aksiome i pravila izvođenja (zaključivanja).

Formalni jezik je potpuno određen kada su određeni njegovi osnovni simboli i formule. Da bi se izlaganje neke formalne teorije učinilo jednostavnijim, često se posebnim **definicijama [21]** u jezik uvode i drugi simboli (osim osnovnih) ili se usvajaju određene konvencije u pisanju (npr. konvencija o brisanju spoljnih zagrada).

Npr., ako logički veznici ¬ i ⇔ nisu uzeti za osnovne simbole iskazne logike, oni se mogu definisati na sledeći način: Neka su A i B iskazne formule; tada:

¬A je zamena za: (A⇒⊥),
(A ⇔ B) je zamena za: ((A⇒B)∧(B⇒A)).

U proučavanju formalnih jezika prirodno se javlja razlika između formalnih problema i problema značenja. Formalni problemi se odnose na strukturu jezika i ne zavise od interpretacije njegovih simbola i formula; proučavanje ovih problema zove se **sintaksa [28]** . Problemi značenja se javljaju kada se simboli i formule jezika
interpretiraju na određeni način; proučavanje ovih problema zove se **semantika [29]** Možemo, dakle, reći da značenja simbola i formula nisu deo jezika, tj. da je formalni jezik u potpunosti sintaktički objekat.

Kada je jezik predmet proučavanja uvek se javljaju dva jezika: jezik koji proučavamo, **objekt-jezik**, i jezik u kome se to proučavanje izvodi, **metajezik [26]**. U opštem slučaju, to mogu biti bilo koji jezici (formalni ili prirodni), pa čak jedan isti jezik može biti i objekt-jezik i metajezik. Najčešće je, međutim, objekt-jezik neki formalni jezik, a metajezik neki prirodni jezik proširen uobičajenim matematičkim terminima i simbolima.

Formalni jezik

predavanja, 17. 11. 2003.
Vujosević, str. 5-8 ♦ str. 7
Kron, str. 2-5, 6-7 ♦ str. 2-4
Prešić. str. 72
Božić, str. 6-11

Formalne teorije

Kron, str. 1-2 ♦ str. 1-2
Prešić, str. 69-74 ♦ str. 69-71
Božić, str. 161-176

[5] Semantika iskazne logike

Jednu **neformalnu interpretaciju Iskazne logike** dobijamo kada iskazne promenljive interpretiramo kao iskaze (tvrđenja) prirodnog jezika, a logičke veznike kao veznike i odgovarajuće izraze prirodnog jezika. Tako, logičkim veznicima možemo dati sledeća imena i značenje:

∧ - konjunkcija - ... i ...

∨ - disjunkcija - ... ili...

⇒ - implikacija - ako... onda...

¬ - negacija - ne...

⇔ - ekvivalencija - ... ako i samo ako ...

Za **formalnu interpretaciju iskazne logike** uzimamo algebarsku strukturu *(2, ∨, ∧, ¬, 0,1)* tzv. **Bulovu algebru 2**. Iskazne promenljive interpretiramo kao elemente skupa 2 = {0,1}, logičke veznike ∨, ∧ i ¬ redom kao operacije ∨, ∧, ¬ Bulove algebre 2, a iskazne konstante ⊥ i T redom kao 0 i 1, tj. kao najmanji i najveći element Bulove algebre 2.

Pojmovi **valuacija [30] iskaznih promenljivih i vrednost iskazne formule** definišu se kao određena preslikavanja u skup 2.

[Definicija valuacije iskaznih promenljivih. Definicija vrednosti iskazne formule.]

Pomoću ovih pojmova defimiše se pojam **tautologija [31]**, koji u neformalnoj interpretaciji odgovara pojmu uvek važeće istine ili logičkog zakona.

[Definicija tautoiogije]

S obzirom na ovakvu interpretaciju iskazne logike, za svaku iskaznu formulu može se utvrditi da Ii je tautologija. Dva efektivna metoda (algoritma) kojima se to može uraditi jesu **metod i stinitosnih tablica** i **metod čišćenja** (ili **metod istinitosnih drveta**).

Ova činjenica - da se za svaku iskaznu formulu može utvrditi da Ii je tautologija -znači, zapravo, da je iskazna logika (za razliku od predikatske logike) **semantički odlučiva formalna teorija**.

Semantika iskazne logike

> predavanja, 24. 11. 2003.
> van Dalen, str. 13-16
> Kron, str. 14-17
> Vujošević, str. 75-76

[6] Teorema o zameni ekvivalenata

Za dve iskazne formule A i B simbol $A^p{}_B$ označava formulu koja se dobija kada se sva javljanja iskazne promenljive p u formuli A zamene javljanjima formule B.

Ukoliko smo za **osnovne simbole formalnog jezika iskazne logike [1]** uzeli:

- iskazne promenljive (iskazna slova): p, q, r, p_1, q_1, r_1 ....
- iskazna konstanta $\perp$,
- logičke **veznici [2]**. $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$,
- interpunkcijski simboli: (,).

i ukoliko smo skup iskaznih formula definisali sledećom **induktivnom definicjom [3]**

(a) Iskazne promenljive i iskazna konstanta $\perp$ su iskazne formule.

(b) Ako su A i B iskazne formule, onda su i $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$ i $(A\Rightarrow B)$ iskazne formule.

tada simbol $A^p{}_B$ možemo definisati i tzv. **indukcijom po složenosti formule** *A:*

(a1) $q^p{}_B = q$ *ako je* $p \neq q$,

(a2) $p^p{}_B = B$,

(b1) $(C\wedge D)^p{}_B = C^p{}_B \wedge D^p{}_B$,

(b2) $(C\vee D)^p{}_B = C^p{}_B \vee D^p{}_B$,

(b3) $(C\Rightarrow D)^p{}_B = C^p{}_B \Rightarrow D^p{}_B$,

gde su p i q bilo koje iskazne promenljive, a A, B, C i D bilo koje iskazne formule.

Teorema o zameni ekvivalenata i njene posledice govore o tome da se ekvivalentne formule mogu zamenjivati.

Za iskazne formule A i B kažemo da su **logički** (ili **semantički**) **ekvivalentne** ako je

formula $A \Leftrightarrow B$ **tautologija [31]**, tj. ako važi:

$\models A \Leftrightarrow B$

TEOREMA O ZAMENI EKVIVALENATA.

Neka su A, B i C iskazne formule, a p iskazna promenljiva koja se javlja u formuli C; tada važi:

ako $\models A \Leftrightarrow B$ onda $\models C^p{}_A <=> C^p{}_B$.

Dokaz se izvodi indukcijom po složenosti formule C.

[Dokaz.]

KOROLAR 1

Neka su A i B iskazne formule, a p iskazna promenljiva koja se javlja u formuli A; tada važi:

ako $\models A$ onda $\models A^p{}_B$.

[Dokaz.]

KOROLAR 2

Neka je A iskazna formula, a p iskazna promenljiva koja se javlja u formuli A; tada važi:

ako $\models A$ onda $\models A^p{}_\perp$ i $\models A^p{}_\perp$

[Dokaz.]

[7] Veze između veznika

Ukoliko smo za osnovne simbole formalnog jezika iskazne logike (T] uzeli:

- iskazne promenljive (iskazna slova): *p, q, r,* p_1, q_1, r_1 ....
- iskazna konstanta ⊥,
- logičke **veznici [2]**. ∧, ∨, ⇒,
- interpunkcijski simboli: (,).

i ukoliko smo skup iskaznih formula definisali sledećom **induktivnom definicjom [3]**:

(a) Iskazne promenljive i iskazna konstanta ⊥ su iskazne formule.
(b) Ako su A i B iskazne formule, onda su i (A∧B), (A∨B) i (A⇒B) iskazne formule.

Tako se, npr., logički veznici ¬ i ⇒ i iskazna konstanta ⊤ mogu definisati na sledeći način:

Neka su A i B iskazne formule; tada:

- ¬A je zamena za: (A⇒⊥),
- (A⇔B) je zamena za: ((A⇒B)∧(B⇒A)),
- ⊤ je zamena za: ¬⊥ .

gde su A i B proizvoljne iskazne formule.

Ako iskaznu konstantu shvatimo kao nularni veznik, možemo, dakle, reći da je u ovom slučaju skup veznika {∨, ∧, ⇒, ⊥} poslužio kao baza za definlsanje ostalih veznika.

Ako je V skup veznika takav da za svaku **istinitosnu funkciju [24]** f postoji formula A u kojoj se javljaju samo veznici iz skupa V i čija je istinitosna funkcija f_A identična funkciji f (tj. važi: $f_A = f$), onda se za skup V kaže da je **baza** ili **funkcionalno potpun skup veznika**.

S obzirom na **funkcionalnu potpunost iskazne logike [11]**, navedena definicija je ekvivalentna tvrđenju da je skup V baza ako za svaku iskaznu formulu A postoji formula B koja sadrži samo veznike iz skupa V i pri tome važi:

⊨A⇔B

Pokazaćemo sada da naš polazni skup veznika {∨, ∧, ⇒, ⊥} nije minimalna baza. tj. da se neki veznici mogu ukloniti, a da oni preostali I dalje predstavljaju funkcionalno potpun skup veznika.

Baza {⇒, ⊥}

Da skup {⇒, ⊥} predstavlja bazu neposredno sledi iz sledećih **tautologija [31]**:

⊨ A∧B ⇔
⊨ A∨B ⇔
⊨ ¬A ⇔
⊨ (A⇔B) ⇔
⊨ T ⇔

Baza {∨, ∧, ¬}

Kao baza mogu poslužiti i skupovi veznika koji sadrže neke veznike koje nismo uzeli za osnovne simbole.

Navodimo poznatu teoremu o **konjunktivnoj** (KNF) i **disjunktivnoj normalnoj formi (DNF)[12]**:

Za svaku iskaznu formulu A postoje formula A^{KNF} u KNF i formula A^{DNF} u DNF takve da je:

⊨ A⇔A^{KNF} i ⊨ A⇔A^{DNF}

S obzirom na definiciju KNF i DNF iz ove teoreme neposredno proizilazi da je skup {∨, ∧, ¬} baza.

Baze {∧,¬}, {∨, ¬} i {⇒, ¬}

Da skup {∧,¬} predstavlja bazu neposredno sledi iz sledećih tautologija:

⊨ A∨B ⇔ ¬(¬A∧¬B)
⊨ (A⇒B) ⇔

$\models \bot \Leftrightarrow$
$\models (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow$
$\models T \Leftrightarrow$

Da skup $\{\vee, \neg\}$ predstavlja bazu neposredno sledi iz sledećih tautologija:

$\models A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
$\models (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$
$\models \bot \Leftrightarrow$
$\models (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow$
$\models T \Leftrightarrow$

Da skup $\{\Rightarrow, \neg\}$ predstavlja bazu neposredno sledi iz sledećih tautologija:

$\models A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B)$
$\models A \vee B \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$
$\models \bot \Leftrightarrow$
$\models (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow$
$\models T \Leftrightarrow$

Jednoelementne baze

Postoje dve jednoelementne baze. Njih čine tzv. **šeferovski veznici [12]** $\uparrow$ odnosno $\downarrow$.

[Dokaz i komentari.]

$\{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$ i $\{\neg, \Leftrightarrow\}$ nisu baze

Ni skup $\{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$ ni skup $\{\neg, \Leftrightarrow\}$ nije baza.

[Dokaz.]

Veze između veznika

predavanja, 15. 12. 2003.
Kron, str. 24-25

[9] Bulove algebre

Bulove algebre su veoma značajne algebarske strukture koje se javljaju u mnogim oblastima matematike. Njihovo proučavanje u okviru logike je važno iz više razloga. S jedne strane, gotovo svi koncepti formalne logike mogu se interpretirati u ovim strukturama! S druge strane, svaki logički sistem u određenoj meri karakteriše algebarska struktura, a neki logički sistemi su upravo Bulove algebre. Ova struktura je dobila ime po velikom engleskom matematičaru i logičaru **Džordžu Bulu** (George Bool, 1815-1864).

Definicija

Bulovu algebru definišemo preko pojma mreže.

Polumrežaje algebarska struktura (S, •) koju čine skup S i binarna operacija • skupa S koja je komutativna, asocijativna i idempotentna. Drugim recima, u polumreži (S, •) za bilo koje x, y, z ∈ S važe sledeće jednakosti:

$x \bullet y = y \bullet x$,

$x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$,

$x \bullet x = x$.

Podsetnik:

- Šta je to binarna operacija nekog skupa?
- Šta je to unarna operacija nekog skupa?

Algebarsku strukturu (S, •, o) koju čine skup S i dve binarne operacije • i o skupa S zovemo mreža ako su strukture (S, •) i (S, o) polumreže i ako za operacije • i o uzajamno važe zakoni apsorpcije. Drugim recima, u mreži (S, •, o) za bilo koje x, y. z ∈ S važe sledeće jednakosti (tzv. aksiome mreže):

$x \bullet y = y \bullet x$, $\quad x \circ y = y \circ x$,
$x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$, $\quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$,
$x \bullet x = x$, $\quad x \circ x = x$,
$x \bullet (x \circ y) = x$, $\quad x \circ (x \bullet y) = x$.

Npr., struktura (P(A), ∪, ∩), gde je P(A) partitivnl skup skupa A i gde su ∪ i ∩ redom operacije unije i preseka skupova, jeste mreža.

Mreža (S, •, o) j je **distributivna** ako s u operacije • i o uzajamno distributivne. Drugim recima, u distributivnoj mreži (S, •, o) za bilo koje x, y, z ∈ S važe, pored aksioma mreže, i sledeće jednakosti:

$x \bullet (y \circ z) = (x \bullet y) \circ (x \bullet z)$, $\quad x \circ (y \bullet z) = (x \circ y) \bullet (x \circ z)$.

Npr., (P(A), ∪, ∩) je distributivna mreža.

Svaka mreža ima svoj **poredak**, tj. u svakoj mreži može se definisati jedna relacija poretka. Tako, u mreži (S, •, o) binarnu relaciju ≤ elemenata x i y skupa S definišemo na sledeći način:

$x \leq y \Leftrightarrow_{def} x \circ y = x$

ili, što je ekvivalentno:

$x \leq y \Leftrightarrow_{def} x \bullet y = y$

Može se pokazati da je ovako definisana relacija ≤ relacija poretka.

[Dokaz.]

Podsetnik:

- Šta je to binarna relacija nekog skupa?
- Šta je to relacija poretka?

U mreži (S, •, o), *y* je njen **najveći element** ako za svako x ∈ S važi: x≤y. Analogno se definiše pojam **najmanjeg elementa** mreže. Ukoliko postoje, najveći i najmanji element mreže (S, •, o) su jedinstveno određeni; možemo ih označiti, redom, sa 1 i 0.

Npr:, (P(A), ∪, ∩) je mreža sa najvećim i najmanjim elementom. Najveći element je skup A, a najmanji prazan skup ∅.

Mreža $(S, \bullet, \circ)$ sa najvećim i najmanjim elementom je **komplementirana** ako za svako $x \in S$ postoji $y \in S$ tako da je:

$x \bullet y = 1$ i $x \circ y = 0$

Ukoliko postoji, element $y \in S$ sa navedenom osobinom nazivamo **komplement** elementa $x \in S$ (u oznaci x^c).

Npr., mreža $(P(A), \cup, \cap)$ jeste komplementirana, jer za svaki skup $X \in P(A)$ postoji njegov komplement, tj. skup $A \setminus X = X^c \in P(A)$ tako da je:

$X \cup X^c = A$ i $X \cap X^c = \emptyset$.

U opštem slučaju, komplement ne mora biti jedinstven. Može se, međutim, pokazati da u nekoj distributivnoj mreži sa najvećim i najmanjim elementom svaki element mreže ima najviše jedan komplement.

Sada možemo definisati **Bulovu** algebru kao distributivnu komplementiranu mrežu.

Potpunije rečeno, Bulova algebra je algebarska struktura $(B, \bullet, \circ, {}^c, 0, 1)$ sa dve binarne operacije $\bullet$ i $\circ$, jednom unarnom operacijom ^{c} i dve konstante 0 i 1 koje zadovoljavaju sledeće jednakosti (tzv. aksiome Bulove algebre):

$x \bullet y = y \bullet x$, $\quad x \circ y = y \circ x$,

$x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$, $\quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$,

$x \bullet x = x$, $\quad x \circ x = x$,

$x \bullet (x \circ y) = x$, $\quad x \circ (x \bullet y) = x$,

$x \bullet (y \circ z) = (x \bullet y) \circ (x \bullet z)$, $\quad x \circ (y \bullet z) = (x \circ y) * (x \circ z)$,

$x \bullet x^c = 1$, $\quad x \circ x^c = 0$

Navedene jednakosti ne predstavljaju sistem nezavisnih aksioma (tj. neke od njih se mogu izvesti iz drugih), ali se obično navode u ovom obliku radi preglednosti. Relativno lako mogu se izvesti i sledeće jednakosti:

$x \bullet 0 = x$, $\quad x \circ 1 = x$,

$x \bullet 1 = 1$, $\quad x \circ 0 = 0$,

$0^c = 1$, $\quad 1^c = 0$.

Npr., algebarska struktura $(P(A), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, A)$, gde je $P(A)$ partitivni skup skupa A, gde su $\cup$ i $\cap$ redom operacije unije i preseka skupova, X^c komplement skupa X u odnosu na skup A i gde je $\emptyset$ prazan skup, jeste Bulova algebra. U njoj, kao što je poznato, važe jednakosti:

$X \cup Y = Y \cup X$, $\quad X \cap Y = Y \cap X$,
$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$, $\quad X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$,
$X \cup X = X$, $\quad X \cap X = X$,
$X \cup (X \cap Y) = X$, $\quad X \cap (X \cup Y) = X$,
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, $\quad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,
$X \cup X^c = A$, $\quad X \cap X^c = 0$.

Ukoliko se u prethodnom primeru za skup A uzme bilo koji jednočlani skup (tzv singlton), onda skup P(A) ima samo dva elementa, tj $P(A) = \{\emptyset, A\}$ To je primer tzv. Bulove algebre 2. **Bulove algebre 2** su Bulove algebre čiji skupovni deo (domen) ima tačno dva elementa. Ove strukture imaju ključnu ulogu u teoriji Bulovih algebri, a takođe i u logici.
Označimo neki dvočlani skup sa 2, a elemente toga skupa sa 0 i 1, tj.
$2 = \{0, 1\}$. Definišimo binarne operacije $\vee$ i $\wedge$ toga skupa i njegovu unarnu operaciju $\neg$ na sledeći način:
$0 \vee 0 = 0$, $\quad 0 \vee 1 = 1$, $\quad 1 \vee 0 = 1$. $\quad 1 \vee 1 = 1$,
$0 \wedge 0 = 0$, $\quad 0 \wedge 1 = 0$, $\quad 1 \wedge 0 = 0$, $\quad 1 \wedge 1 = 1$,
$\neg 0 = 1$, $\quad \neg 1 = 0$.
Tada je $(2, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ jedna Bulova algebra 2. Elementi skupa 2 često se označavaju i sa $\perp$ i T.
Ukoliko se u polaznom primeru za skup A uzme neki dvočlani skup, tj. ukoliko je $A = \{x, y\}$, onda skup P(A) ima četiri elementa, tj. $P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, A\}$. To je primer tzv. **Bulove algebre 4**.
Važan primer Bulove algebre je tzv. **Lindenbaumova algebra [10]** iskazne logike.

Homomorfizam Bulovih algebri

Homomorfizam Bulovih algebri definiše se kao preslikavanje koje čuva njihovu strukturu. Neka su (A, •, o, ^{c}, 0, 1) i (B, □, Δ, *, 0, 1) dve Bulove algebre; funkcija f: A⇒B je homomorfizam ovih algebri ako je:

f(x.y)=f(x) □f(y),
f(xoy)=f(x)Δf(y),
$f(x^c) = f(x)^*$,
f(0) = 0,
f(1) = 1,

Podsetnik:

- Šta je to preslikavanje (funkcija)?
- Šta je to bijektivno preslikavanje (bijektivna funkcija, bijekcija)?

U definiciji homomorfizma svi navedeni uslovi nisu neophodni. Na primer, dovoljno je da važi saglasnost preslikavanja f sa operacijama • i ^{c}; ostale saglasnosti se onda mogu izvesti iz njih.
Homomorfizam je takođe saglasan sa poretkom, tj. za sve x, y ∈ A važi:

$x \leq y$ akko $f(x) \leq f(y)$.

Obratno, međutim, ne važi, tj. preslikavanje koje čuva poredak nije obavezno homomorfizam.
Izomorfizam Bulovih algebri je homomorfizam koji je bijektivno preslikavanje.

Sve Bulove algebre 2 su međusobno izomorfne, pa se kaže da je Bulova algebra 2 jedinstvena do izomorfizma.
I sve Bulove algebre 4 su međusobno izomorfne, tj. i Bulova algebra 4 je jedinstvena do izomorfizma.

[10] Lindenbaumova algebra

Skup F svih formula iskazne logike (iskaznih formula) ima svojstva bliska **Bulovoj algebri [9]**. Tako, konjunkcija, disjunkcija i negacija imaju sva svojstva bulovskih operacija. Međutim, sam po sebi, skup F svih iskaznih formula Ipak nije Bulova algebra. Na primer, formule $p \wedge q$ i $q \vee p$ su različite, tj. u skupu F nije definlsana relacija =. Ukoliko u skupu F relaciju ⇔ shvatimo kao zamenu za relaciju = tada tako dobijena struktura potpuno odgovara Bulovoj algebri. Ulogu 0 može da ima bilo koja kontradikcija, a ulogu 1 bilo koja **tautologija [9]**.

Izjednačavanjem ekvivalentnih formula dobićemo novu strukturu koja jeste Bulova algebra.

U tom cilju, definišimo na skupu F svih iskaznih formula binarnu relaciju ≡ na sledeći način:

za dve iskazne formule A i B kažemo da su u relaciji ≡ ako je formula $A \Leftrightarrow B$ tautologija, tj.

$A \equiv B \Leftrightarrow_{def.} \models A \Leftrightarrow B.$

(NAPOMENA, Za dve iskazne formule A i B za koje važi $\models A \Leftrightarrow B$ kažemo i da su **logički ekvivalentne**. U skladu sa tim, možemo reći da su dve iskazne formule A i B u relaciji ≡ ako su logički ekvivalentne.)

Pokazaćemo daje relacija ≡ jedna **relacija ekvivalencije**.

Za svaku iskaznu formulu A formula $A \Leftrightarrow A$ je tautologija. Prema tome, važi i: $A \equiv A$, pa je relacija ≡ refleksivna.

Za svake dve iskazne formule A i B važi: ako je formula $A \Leftrightarrow B$ tautologija, onda je tautologija i formula $B \Leftrightarrow A$. Prema tome, ako važi: $A \equiv B$, onda važi i: $B \equiv A$ pa je relacija ≡ **simetrična**.

Za svake tri Iskazne formule A, B i C važi: ako su formule $A \Leftrightarrow B$ i $B \Leftrightarrow C$ tautologije, onda je tautologija i formjula $A \Leftrightarrow C$ Prema tome, ako važi: $A \equiv B$ i: $B \equiv C1$ onda važi i: $A = C1$ pa je relacija ≡ tranzitivna.

Podsetnik:

- Šla je Io relacija ekvivalencije?
- Šla su to klase ekvivalencije?
- Šta je to količnički skup?

Neka [A] označava **klasu ekvivalencije** formule A u skupu F po relaciji h, tj.

$[A] =_{def} \{P \in F \mid P \equiv A).$

Drugim recima, [A] je skup svih iskaznih formula koje su logički ekvivalentne formuli A.

Neka je B_F količnički skup skupa F po relaciji ≡, tj

$B_F =_{def} \{[A] \mid A \in F\}.$

Drugim recima, B_F je skup svih klasa ekvivalencije skupa *F* po relaciji ≡.

Definišimo sada binarne operacije ∪i ∩ i unarnu operaciju ^{c} skupa B_F na sledeći način:

$[A] \cup [B] =_{def} [A \vee B],$

$[A] \cap [B] =_{def} [A \wedge B],$

$[A]^c =_{def} [\neg A]$

za svako $[A], [B] \in B_F$, (tj. za svake dve iskazne formule A i B).
Drugim recima, $[A] \cup [B]$ je skup svih iskaznih formula koje su logički ekvivalentne formuli $A \vee B$, $[A] \cap [S]$ je skup svih formula koje su logički ekvivalentne formuli $A \wedge B$, a $[A]^c$ je skup svih formula koje su logički ekvivalentne formuli $\neg A$.
Uvedimo i sledeće oznake:

$0 =_{def} [\perp]$

$1 =_{def} [T]$

Drugim recima, 0 je skup svih iskaznih formula koie su kontradikcije, a 1 je skup svih formula koje su tautologije.
Ovako definisana algebarska struktura $(B_F, \cup, \cap, ^c, 0, 1)$ zove se **Lindenbaumova algebra iskazne logike.**
Može se pokazati da struktura $(B_F, \cup, \cap, ^c, 0, 1)$ predstavlja Bulovu algebru. Pokazaćemo, npr., da je operacija ∪ komutativna.

$[A] \cup [B] =_{def}$
$[A \vee S] =_{def}$
$\{P \in F \mid P \equiv A \vee B\} =_{def}$
$\{P \in F \mid \models P \Leftrightarrow A \vee B\} =_{def}$
$\{P \in F \mid \models P \Leftrightarrow B \vee A) =_{def}$
$\{P \in F \mid P \equiv B \vee A) =_{def}$
$[B \vee A] =_{def}$
$[B] \cup [A]$.
Dokaz se, dakle, zasniva na komutativnosti konjunkcije.

U algebarskoj strukturi (B_F, $\cup$, $\cap$, ^{c}, 0, 1) binarnu relaciju $\leq$ elemenata [A] i [B] skupa B_F možemo definisati na sledeći način:
$[A] \leq [B] \Leftrightarrow_{def} [A] \cap [B] = [A]$.

Budući da važi:
$[A] \cap [B] = [A] \Leftrightarrow_{def}$
$[A \wedge B] = [A]$ akko
$\models A \wedge B \Leftrightarrow A$ akko
$\models A \Rightarrow B$,

to se relacija $\leq$ može ekvivalentno definisati i na sledeći način:
$[A] \leq [B] \Leftrightarrow_{def} \models A \Rightarrow B$.

Može se pokazati da je relacija $\leq$ relacija poretka.

Homomorfizam Lindenbaumove algebre iskazne logike i Bulove algebre 2
(2, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, 0, 1) može se definisati kao preslikavanje f_v skupa B_F u skup 2 (u oznaci
f_v: $B_F \Rightarrow 2$) za koje važi:
$f_v([A] \cup [B]) = v(A \vee B) = v(A) \vee v(B)$,
$f_v([A] \cap [B]) = v(A \wedge B) = v(A) \wedge v(B)$,
$f_v([A]^c) = v(\neg A) = \neg v(A)$,
$f_v(0) = v(\bot) = 0$,
$f_v(1) = v(T) = 1$,
gde su A i B proizvoljne iskazne formule, a v(A) **vredNost iskazne formula** A za neku **valuaciju [30]** *v* **Iskaznih promenljivih**.

Koristeći poznate **tautologije [31]** koje izražavaju **veze između veznika [7]**, možemo pokazati da su baze sledeći skupovi veznika:
$\{\Rightarrow, \bot\}$,
$\{\wedge, \vee, \neg\}$,
$\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$ i $\{\Rightarrow, \neg\}$

kao i da postoje dve jednoelementne baze, koje čine tzv. **šeferovski veznici [12]** $\uparrow$ odnosno $\downarrow$.

$\models A \wedge B \Leftrightarrow$
$\models A \vee B \Leftrightarrow$
$\models \neg A \Leftrightarrow$
$\models (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow$
$\models T \Leftrightarrow$

Funkcionalna potpunost iskazne logike
predavanja, 15. 12. 2003.
Kron, str. 23-25
Prešić, str. 20-24

[11] Funkcionalna potpunost iskazne logike

Svako preslikavanje (funkciju) *f* čiji je kodomen skup 2 = {0, 1} zovemo **istinitosna funkcija**.

Istinitosnu funkciju f_A neke iskazne Tormule A definisaćemo kao preslikavanje koje svakoj **valuaciji [30]** *v* **iskaznih promenljivih** formule A dodeljuje **vrednost** *v*(A) **iskazne formule** A za valuaciju *v*.

Precizna definicija glasi:

Neka je $\{p_1,.... p_n\}$ skup svjh iskaznih promenljivih koje se javljaju u formuli A. Tada preslikavanje f_A: $2^n \Rightarrow 2$ zovemo **istinitosna funkcija Iskazne formule** A ako za svaku valuaciju *v* skupa iskaznih promenljivih $\{p_1,.... p_n\}$ važi:

$f_A\ (v(p_1), ..., v(\ p_n) = v(A)$,

gde je *v* (A) vrednost iskazne formule A za valuaciju *v*.

Činjenica da svaka iskazna formula ima svoju istinitosnu funkciju naziva se **istinitosna funkcionalnost [24]** iskaznih formula. Može se u istom smislu govoriti i o istinitosnoj funkcionalnosti logičkih **veznika [2]**.

Jasno je da za svaku iskaznu formulu A postoji tačno jedna istinitosna funkcija f_A formule A.

S druge strane, dve različite iskazne formule mogu imati istu istinitosnu funkciju.
To je, npr. slučaj sa formulama:

$(p\lor q)\land\neg r$,

$((p\lor q)\lor\neg r)\land(p\lor\neg p)$

Istinitosna funkcija iskazne formule A može se u potpunosti predstaviti **istinitosnom tablicom** formule A.

[12] Konjunktivna i disjunktivna normalna forma

Iskazna formula A u kojoj se javljaju samo promenljive p_1,.... p_n je u **konjunktivnoj normalnoj formi** (KNF) ako A ima oblik:

$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$,

pri čemu za sve $i \in \{1, ..., m\}$ B_i ima oblik

$C_1 \vee \ldots \vee C_n$

i za sve $j \in \{1, ..., k\}$, $k \leq n$,

C_j je p_j ili $\neg p_j$

Iskazna formula A u kojoj se javljaju samo promenljive p_1,.... p_n je u **disjunktivnoj normalnoj formi** (DNF) ako A ima oblik

$B_1 \vee \ldots \vee B_m$,

pri čemu za sve $i \in \{1, ..., m\}$ B_i ima oblik

$C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$

i za sve $j \in \{1, ..., k\}$, $k \leq n$,

C_j je p_j ili $\neg p_j$

Teorema

Za svaku iskaznu formulu A postoje formula A^{KNF} u KNF i formula A^{DNF} u DNF takve da je:

$\models A \Rightarrow A^{KNF}$ i $\models A \Rightarrow A^{DNF}$

[Dokaz.]

Ova teorema pokazuje da za svaku formulu A postoji ekvivalentna formula u kojoj se javljaju samo veznici $\wedge$, $\vee$ i $\neg$.

***

Iskazna formula A u kojoj se javljaju samo promenljive p_1,.... p_n je u **savrsenoj konjunktivnoj normalnoj formi** (SKNF) ako A ima oblik:

$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$,

pri čemu za sve $i \in \{1, ..., m\}$ B_i ima oblik

$C_1 \vee \ldots \vee C_n$

i za sve $j \in \{1, ..., n\}$

C_j je p_j ili $\neg p_j$

Iskazna formula A u kojoj se javljaju samo promenljive p_1,.... p_n je u **savrsenoj isjunktivnoj normalnoj formi** (SDNF) ako A ima oblik

$B_1 \vee \ldots \vee B_m$,

pri čemu za sve $i \in \{1, ..., m\}$ B_i ima oblik

$C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$

i za sve $j \in \{1, ..., n\}$

C_j je p_j ili $\neg p_j$

TEOREMA

Za svaku iskaznu formulu A koja nije **tautologija [31]** postoji formula A^{SKNF} u SKNF takva da je $\models A \Rightarrow A^{SKNF}$

Za svaku iskaznu formulu A koja nije **tautologija [31]** postoji formula A^{SKNF} u SKNF takva da je $\models A \Leftrightarrow A^{SKNF}$

Za svaku iskaznu formulu A koja nije **kontradikcija** postoji formula A^{SDNF} u SDNF takva da je $\models A \Leftrightarrow A^{SDNF}$

[Dokaz.]

Ako je formula A tautologija, onda SDNF formule A ima 2^n disjunkata; ako je A kontradikcija onda SKNF formule A ima 2^n konjunkata. Tautologije nemaju SKNF, a kontradikcije nemaju SDNF.

Konjunktivna i disjunktivna normalna forma

predavanja, 22. 12. 2003.
Kron, str. 24
Prešić. str. 23-24

[15] Potpunost iskazne logike

Sintaksa [28] iskazne logike određena je njenim **formalnim jezikom [1]** (osnovnim simbolima i formulama), skupom aksioma i modusom ponens kao pravilom izvođenja. Sve aksiome su **tautologije [31]**, što se jednostavno pokazuje. Otuda prirodno očekujemo da nas dokazi (**dedukcije [34]**) ne izvode iz skupa tautologija, odnosno da je skup **teorema [36]** iskazne logike podskup skupa tautologija. Ova činjenica se naziva saglasnošcu sintakse sa **semantikom [29]** iskazne logike.

------- PREKUCATI -------

Dokaz

> Teoremu dokazujemo **indukcijom po složenosti dokaza** formule A iz hipoteza G. U prinicpu, taj dokaz se ne razlikuje od dokaza prethodne teoreme.

U iskaznoj logici, saglasnost sintakse i semantike je potpuna, tj. i semantika je saglasna sa sintaksom. Pokazuje se, naime, da važe i obratna tvrđenja od onih koja su iskazana u prethodne dve teoreme.

Potpuna saglasnost semantike i sintakse iskazne logike naziva se **potpunošću iskazne logike**.

<u>Teorema o potpunosti iskazne logike</u>

> Za svaku iskaznu formulu A važi:
>
> > |- A ako i samo ako |= A.
>
> Drugim recima, svaka teorema iskazne logike je tautologija i, obratno, svaka tautologija je teorema.

Dokaz

> S obzirom na teoremu saglasnosti, dovoljno je pokazati da važi:
>
> > ako I= A onda |- A.
>
> [Dokaz.]

<u>Proširena teorema o potpunosti iskazne logike</u>

> Za svaki skup G iskaznih formula i svaku iskaznu formulu A važi:
>
> > G |-A ako i samo ako G |=A

Dokaz

> S obzirom na proširenu teoremu saglasnosti, dovoljno je pokazati da važi:
>
> > ako G |=A onda G|-A.
> >
> > [Dokaz.]

Potpunost iskazne logike

> predavanja, 15. 3. 2004.
> Vujošević, str. 81-84
> Kron, str. 43-45, 52-53
> Prešić, str. 83-86

[16] Relacijsko-operacijske strukture

Podsetnik:

- Šta su to binarne, unarne i nularne relacije nekog skupa?
- Šta je to preslikavanje (funkcija)?
- Šta su to binarne, unarne i nularne operacije nekog skupa?

U opštem slučaju, **relacijsko-operacijska struktura** S je matematički objekat koji sadrži sledeće komponente:

(a) neprazan skup D, koji se naziva **domen strukture**,
(b) skup R **relacija** skupa D, pri čemu skup R može biti i prazan a relacije mogu biti proizvoljne dužine,
(c) skup F **operacija** skupa D, pri čemu skup F može biti i prazan, a operacije mogu biti proizvoljne dužine,
(d) skup C **konstanti**, odnosno elemenata skupa D, pri čemu skup C može biti i prazan.

Ovakva struktura obično se obeležava sa $S = (D, r_1, r_2, \ldots , f_1, f_2, c_1, c_2,\ldots)$, pri čemu, eventualno., važi: $r_1, r_2, \ldots \in R$, $f_1, f_2\ldots \in F$, $c_1, c_2\ldots \in C$.

Relacijsko-operacijske strukture nazivaju se još i **matematičke strukture** ili samo **strukture**.

Formalni jezik na kome se izražavaju svojstva ovih struktura jeste **formalni jezik predikatske logike ili jezik prvoga reda [17]**.

Relacijsko-operacijske strukture u kojima je od relacija definisana jedino relacija jednakosti nazivaju se **algebarske** ili **operacijske strukture** (ili, ponekad, **algebre [27]**).

Algebarska struktura koja ima poseban značaj u logici jeste **Bulova algebra [9]**.

Operacijsko-relacijske strukture

predavanja, 29. 3. 2004.
Kron, str. 61-62
Vujošević, str. 87-88

[17] Jezik prvoga reda

Formalni jezik [4] sastoji se iz osnovnih simbola i formula.

> Pod **osnovnim simbolom** u nekom formalnom jeziku podrazumevamo simbol koji je celina i čije delove ne koristimo kao simbole u tom jeziku. Skup osnovnih simbola nekog formalnog jezika obično se zadaje nabrajanjem. Ovaj skup se često naziva i **azbukom** (**alfabetom**) formalnog jezika.

Za osnovne simbole **formalnog jezika predikatske logike** ili **jezika prvoga reda** mogu se uzeti:

- individualne promenljive: x, y, z, x,, y,, z,.....
- individualne konstante: a, b, c, a,, b,, ch .... 0, 1.....
- operacisjki (funkcionalni) simboli: f, g.....+, *, ...
- relacijski (predikatski) simboli: R, R_1.....S_1 <,....
- logički **veznici [2]**: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\perp$,
- kvantifikatorski prefiksi: $\forall$, $\exists$,
- pomočni simboli: zagrade i zapeta.

Individualnih promenljivih i individualnih konstanti ima prebrojivo mnogo.

Jasno je da se logički veznici mogu uvrstiti u skup osnovnih simbola i u nekoj drugoj kombinaciji. Slično, među osnovne simbole se može uvrstiti i samo jedan od kvantifikatorskih prefiksa, dok bi se drugi uveo kasnije, odgovarajućom definicijom.

često se u skup osnovnih simbola jezika prvoga reda kao poseban simbol uvršćuje i znak = binarne relacije (binarnog predikata) jednakosti. Predikatski račun koji sadrži relaciju = naziva se **predikatski račun sa jednakošću**. Uvršćivanje znaka = u skup osnovnih simbola opravdano je time da jezik prvoga reda treba da izražava svojstva složenih **matematičkih struktura [16]** u kojima je relacija = uvek definisana.

Individualne promenljive, logički veznici, kvantifikatorski prefiksi i pomoćni simboli predstavljaju grupu osnovnih simbola koje nazivamo **logički simboli**. (U predikatskom računu sa jednakošću ovde spada i znak jednakosti.)

Svi drugi simboli čine nelogički deo jezika. Taj deo je promenljiv, pri. čemu svaki od skupova individualnih konstanti, operacijskih i relacijskih simbola može biti i prazan. Kada definišemo neki konkretan jezik L prvoga reda, dovoljno je navesti njegove **nelogičke simbole** tj. individualne konstante i operacijske i relacijske simbole koje on eventualno sadrži.

> Konačni niz simbola zove se **reč**. Svaki simbol je, dakle, ujedno i reč. Reč može biti i prazna; tada ne sadrži nijedan simbol. Skup svih reči je opštiji pojam od jezika, tj. formalni jezik je podskup skupa svih reči napravljenih od osnovnioh simbola. Reči koje pripadaju jeziku zovu se **formule**.
>
> Formule nekog formalnog jezika zadaju se tzv. **induktivnim** (ili **rekurzivnim**) **definicijama [3]** koje predstavljaju skupove pravila po kojima se formule grade.

Skup svih formula predikatske logike (predikatskih formula) definisaćemo preko terma i atomskih formula.

Skup svih terma jezika prvoga reda definišemo sledećom induktivnom definicijom:

> (a) Individualne promenljive i individualne konstante su termi.
> (b) Ako su t_1,.... t_n termi i f operacijski simbol dužine n, onda je $f(t_1, \dots , t_n)$ term.

Npr., sledeće reči jezika prvoga reda su termi:

> x_t, a_3, $f_1(x)$, $f_2(x, y)$, $f_2(t_2\ (x, a_1), f_1(a_2))$.

Ukoliko se dogovorimo da umesto $f_1(x)$, $f_2(x, y)$ pišemo redom sin x i x + y, navedene terme pisaćamp ovako:

> x_1, a_3, sin x, x + y, $(x + a_1) + \sin a_2$.

Skup svih **atomskih** (ili **elementarnih**) **formula** jezika prvoga reda definišemo sledećom induktivnom definicijom:

> Ako su $t_1, \dots, t_n$ termi i R relacijski simbol dužine n, onda je $R(t_1, \dots, t_n)$ atomska formula.
>
> > Npr., atomske predikatske formule jesu:
> >
> > > $R_1(x_1, x_2)$, $R_1(f_3(x), f_2(x,y))$, $R_2(x,y)$,

koje možemo interpretirati, npr., ovako:

$x_{1<=}x_2$, x^2<=x+y, x je deljivo sa y.

Skup svih formula jezika prvoga reda (predikatskih formula) definišemo sledećom induktivnom definicijom:

(a) Atomske formule su formule.
(b) Nularni logički veznik ⊥ je formula.
(c) Ako su A i B formule, onda su i (A∧B), (A∨B) i (A⇒B) formule.
(d) Ako je A formula i x individualna promenljiva, onda su i ∀xA i ∃xA formule.

Npr., predikatske formule su:

∀x∀y∀z((x<=y∧y<=z) ⇒ x<=z),
∀x∃y x<=y ⇒ ∃y∀x x<=y

Formalni jezik je potpuno određen kada su određeni njegovi osnovni simboli i formule. Da bi se izlaganje neke formalne teorije učinilo jednostavnijim, često se posebnim **definicijama [21]** u jezik uvode i drugi simboli (osim osnovnih).

Tako se, npr., logički veznici ¬ i ⇒ i ⊤ mogu definisati na sledeći način:

Neka su A i B predikatske formule; tada:

- ¬A je zamena za: (A⇒⊥),
- (A⇔B) je zamena za: ((A⇒B)∧(B⇒A)),
- ⊤ je zamena za: ¬⊥ .

Radi poboljšanja čitljivosti predikatskih formula, često se usvajaju određene konvencije u njihovom pisanju (npr. konvencija o brisanju spoljnih zagrada).

Budući da su predikatske formule induktivno definisane, to skup svih potformula neke predikatske formule A takođe možemo definisati induktivnom definicijom. Potformula formule A je, zapravo, niz susednih simbola u formuli A koji je sam po sebi predikatska formula.

Za proizvoljnu promenljivu x kažemo da je **pod dejstvom kvantifikatora** ∀y (odnosno ∃y) ukoliko postoji formula B u kojoj se x javlja i pri tome je ∀yB (odnosno ∃yB) potformula formule A.

Javljanje promenljive x u formuli A je **vezano** ako se u tom javljanju promenljiva x nalazi pod dejstvom kvantifikatora ∀yB ili ∃yB. Ono javljanje promenljive x koje nije vezano je **slobodno**. U istoj formuli promenljiva x može imati više vezanih i više slobodnih javljanja. Ako promenljiva x ima slobodno javljanje u formuli A, kažemo da je promenljiva x **slobodna** u formuli A. Sa Ax označavaćemo formulu A u kojoj x moža (a ne mora) biti slobodna promenljiva.

Promenljiva y je **slobodna za promenljivu** x u formuli A ako se promenljiva x u formuli A ne nalazi pod dejstvom kvantrfikatora ∀y ili ∃y.

Npr., promenljiva y je slobodna za promenljivu x u formuli Ax, ali nije slobodna za x u formulama ∀yAx ili ∃yAxy.

Term t je **slobodan za promenljivu** x u formuli A ako su sve njegove promenljive slobodne za promenljivu x u formuli A.

Npr., term x+z slobodan je za promenljivu x u formuli

∃yAxy ⇒ Bx,

ali nije slobodan za x u formuli:

∃z∀yAxy ⇒Bx.

Iz navedene definicije proizilazi da ako sve promenljive terma t imaju jedino slobodna javljanja u formuli A, onda je term t slobodan za bilo koju promenljivu u formuli A.

Terme koji nemaju slobodnih promenljivih zovemo **zatvoreni termi**.

Predikatske formule koje nemaju slobodnih promenljivih zovemo **rečenice** ili **zatvorene formule**.

Jezik prvoga reda

predavanja, 22. i 29. 3. 2004.
Kron, str. 62-66
Vujošević, str. 87-91

Vujošević: str. 87-91
Prešić, str. 29-31, 39-42. 59-60

[18] Valjane formule

Neka je L neki **jezik prvoga reda [17]** i neka je D neki neprazan skup. Interpretacija individualne konstante c jezika L je neki element $\underline{c}$ skupa D. **Interpretacija** operacijskog simbola f jezika L je neka operacija $\underline{f}$ skupa D odgovarajuće dužine. Interpretacija relacijskog simbola R jezika L je neka relacija $\underline{R}$ skupa D odgovarajuće dužine.

Relacijsko-operacijsku strukturu [16] S čiji je domen neprazan skup D, čije su sve relacije interpretacije relacijskih simbola jezika L, čije su sve operacije interpretacije operacijskih simbola jezika L i čije su sve konstante interpretacije individualnih konstanti jezika L - zovemo interpretacija jezika L na skupu D ili model jezika L.

Jasno je da jedan jezik može imati više interpretacija, čak i na istom skupu. Da bismo odredili značenje sintaktičkih objekata jezika L (predikatskih formula;i dr.), potrebno je da najpre preciziramo pravila po kojima se interpretiraju termi i određuje njihova vrednost u modelu S jezika L.

Vrednost terma u datom modelu S zavisi samo od vrednosti individualnih promenljivih koje se u njemu javljaju. Pretpostavićemo da su vrednosti svih individualnih, promenljivih jezika L određene, tj. da je data jedna određena valuacija u individualnih promenljivih jezika L u skupu D.

Budući da smo skup svih **terma** jezika prvoga reda definisali sledećom induktivnom definicijom:

(a) individualne promenljive i individualne konstante su terml;
(b) ako su $t_1, ..., t_n$ termi i f operacijski simbol dužine n, onda je $f(t_1, ..., t_n)$ term;

vrednost terma t u modelu S za valuaciju v (u oznaci $v(t)^s$) definisaćemo tzv. indukcijom po složenosti terma t, na sledeći način:

(a_1) vrednost svake individualne promenljive p jeste vrednost koja joj je dodeljena valuacijom v, tj. $v(p)^s = v(p)^s$

(a_1) vrednost svake individualne konstante c jeste njena interpretacija $\underline{c}$ u modelu S; tj. $v(c)^s = \underline{c}$

(b) ako su $t_1, ..., t_n$ termi, f operacijski simbol dužine n I $\underline{f}$ njegova interpretacija u modelu S, onda je:

$$v(f(t_1, ..., t_n))^s = f(v(t_1)^s, ..., v(t_n)^s)$$

Sada ćemo, indukcijom po složenosti formule A, definisati kada valuacija v zadovoljava predikatsku formulu A u modelu S.

Skup svih **atomskih** (ili **elementarnih**) **formula** jezika prvoga reda definisali smo sledećom induktivnom definicijom:

Ako su $t_1, ..., t_n$ termi i R relacijski simbol dužine n, onda je $R(t_1, ..., t_n)$ atomska formula.

Skup svih formula jezika prvoga reda (predikatskih formula) definisali smo sledećom induktivnom definicijom:

(a) Atomske formule su formule.
(b) Nularni logički veznik $\perp$ je formula.
(c) Ako su A i B formule, onda su i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ i $(A \Rightarrow B)$ formule.
(d) Ako je A formula I x individualna promenljiva, onda su i $\forall x A$ i $\exists x A$ formule.

U skladu sa ovim definicijama, tvrđenje da **valuacija** v **individualnih promenljivih zadovoljava prodlkatsku formulu** A u **modelu** S, koje označavamo sa u $v \models_s A$, definišemo na sledeći način:

(a) ako je $R(t_1, ..., t_n)$ atomska formula, gde su $t_1, ..., t_n$ termi i R relacijski simbol dužine n, i ako je $\underline{R}$ interpretacija relacijskog simbola R u modelu S, onda
$v \models_s R(t_1, ..., t_n)$ ako i samo ako $(v(t_1)^s, ..., v(t_n)^s) \in \underline{R}$;
(b) nije $v \models_s \perp$;
(c) ako su A i B formule, onda
$v \models_s (A \wedge B)$ ako i samo ako je $v \models_s A$ i $v \models_s B$,
$v \models_s (A \vee B)$ ako i samo ako je $v \models_s A$ ili $v \models_s B$,
$v \models_s (A \Rightarrow B)$ ako i samo ako nije u $v \models_s$ ili je $v \models_s B$;
(d) ako je A formula i x individualna promenljiva, onda
$v \models_s \forall x A$ ako i samo ako za svako $\underline{x} \in D$ postoji bar jedna valuacija $v_{\underline{x}}$ u kojoj je promenljvoj x dodeljena vrednost $\underline{x}$ za koju važi: $v_{\underline{x}} \models_s A$,
$v \models_s \exists x A$ ako i samo ako postoji bar jedno $\underline{x} \in D$ takvo da za neku valuaciju $v_{\underline{x}}$ u kojoj je promenljvoj x dodeljena vrednost $\underline{x}$

važi: $v_{\underline{x}} \models_s A$.

Ako valuacija v zadovoljava formulu A u modelu S, tj. ako $v \models_s A$, kažemo još i da **formula** A **važi u modelu** S **za valuaciju** v.

Neka je G neki skup predikatskih formula. Ukoliko za valuaciju v i za svaku formulu A iz skupa G važi: $v \models_s A$, kažemo da **valuacija** v **zadovoljava skup formula** G **u modelu** S. Ovo označavamo sa: $v \models_s G$.

Predikatska formula A je **logička** (ili **semantička**) posledica skupa formula G u modelu S (u oznaci $G \models_s A$) ako svaka valuacija v koja **zadovoljava** G u modelu S zadovoljava i A. U tom slučaju, formule skupa G zovemo **hipoteze**.

Može se pokazati da istinitost neke predikatske formule, za datu vajuaciju, zavisi od njenih slobodnih promenljvih. Predikatske formule koje nemaju slobodnih promenljivih zovemo **rečenice** ili **zatvorene formule**. Ako je A rečenica, onda za svaku valuaciju v individualnih promenljivih u modelu S važi: $v \models_s A$ ili $v \models_s \neg A$.

Ako za rečenicu A za svaku valuaciju v u modelu S važi $v \models_s A$, onda kažemo da **rečenica** A **važi u modelu** S ili da je S **model rečenice** A. To označavamo sa:

$S \models A$

Model S jezika L je **model skupa rečenica** G ako za svaku rečenicu A iz skupa G važi $S \models A$. To označavamo sa: $S \models G$.

Rečenica A je **valjana formula** ili **logička istina predikatskog računa** ako važi u svakom modelu jezika L. Da je formula A valjana formula označavamo sa: $\models A$.

Vidimo, dakle, da je neka predikatska formula valjana ako je istinita u svakoj interpretaciji. Istinitost takve formule ne zavisi od toga kako su interpretirani njeni nelogički simboli već isključivo od njene logičke strukture. Skup valjanih formula sadrži **tautologije [31]**, tj. skup svih tautologija je podskup skupa svih valjanih formula. Međutim, za razliku od iskazne formule, rečenica može imati beskonačno mnogo neizomorfnih modela, tako da je problem odlučivosti predikatske logike mnogo složeniji od problema **odlučivosti Iskazne logike [8]**. U opštem slučaju, ne postoji efektivan postupak (algoritam) za utvrđivanje da Ii je neka rečenica valjana formula. Drugim recima, predikatska logika **nije semantički odlučiva** formalna teorija.

[20] Prirodnodedukcijska pravila za jednakost

Često se u skup osnovnih simbola **jezika prvoga reda [17]** kao poseban simbol uvršćuje I znak = binarne relacije (binarnog predikata) jednakosti. Predikatski račun koji sadrži relaciju = naziva se **predikatski račun sa jednakošću**. Uvršćivanje znaka = u skup osnovnih simbola opravdano je time da jezik prvoga reda treba da izražava svojstva složenih **matematičkih struktura [16]** u kojima je relacija = uvek definisana.

Ukoliko se predikatski račun sa jednakošću zasniva aksiomatski, tada se u skup aksioma teorije uvršćuju i sledeće dve aksiome, tzv. **aksiome jednakosti**:

$x=x$,
$x = y \Rightarrow A(x) \Leftrightarrow A(y)$,

gde x i y označavaju individualne promenljive, a A (y) predikatsku formulu koja se dobija kada se u predikatskoj formuli A (x) neka (možda nijedno i ne nužno sva) javljanja promenljive x zamene javljanjima promenljive y.

Ukoliko se predikatski račun sa jednakošću zasniva kao prirodnodedukcijska formalna teorija, tada se u skup pravila izvođenja teorije uvršćuju i sledeća dva pravila, tzv. **prirodnodedukcijska pravila za jednakost:**

uvođenje =	eliminisanje =
$x=x$	$\dfrac{x=y \qquad A}{A[x/y]}$
	$\dfrac{x=y \qquad A}{A[y/x]}$

gde je A [x/y] rezultat zamene promenljive x promenljivom y u nekim ili svim javljanjima promenljive x u formuli A.

> Npr., ako je A formula Fcc, onda A [c/d] može biti: Fcd, Fdc ili Fdd. (Dokaz valjane formule ∀x∀y (x = y => y = x); Bonevac, str. 236.]

Prirodnodedukcijska pravila za jednakost

> Bonevac, str. 235-238

[21] Šta je to definicija?

U formalnim teorijama, **definicija** je pravilo kojim se u **formalni jezik [4]** uvodi novi simbol.

Formalni jezik je, naime, potpuno određen kada su određeni njegovi osnovni simboli i formule. Da bi se izlaganje neke formalne teorije učinilo jednostavnijim, često se pored osnovnih.u jezik uvode i drugi simboli. Takvi simboli se nazivaju **deflnisani** (ili **izvedeni**) **simboli**. Pomoću osnovnih i definisanih simbola grade se **definisane formule**. Svaku definisanu formulu možemo, dakle, shvatiti kao kraći oblik neke formule napisane samo pomoću osnovnih simbola.

Za svaki definisani simbol postoji definicija. To je pravilo kojim se kaže kako se pomoću novog simbola grade definisane formule i kako se od jedne takve definisane formule dolazi do izvorne formule koja je njom skraćena.

> Npr., ako logički veznici ¬ I ⇔ nisu uzeti za osnovne simbole iskazne logike, oni se mogu definisati na sledeći način: . Neka su A I B iskazne formule; tada:
>
> - ¬A je zamena za: (A⇒⊥),
> - (A⇔B) je zamena za: ((A⇒B)∧(B⇒A)),

Umesto izraza *'je zamena za:'* često se piše: =def. ili ⇔def.

Uopšte uzev, definicijom se u neku teoriju uvodi jedan novi termin ili simbol koji se tom definicjom dovodi u vezu sa polaznim ili ranije uvedenim terminima ili simbolima. Budući da se misaoni sadržaj (korelat) nekog termina ili simbola naziva 'pojam', rnože se reći i da se definicijom uvodi novi pojam.

Glavni razlog za uvođenje definicija, odnosno novih termina i simbola, jeste uprošćavanje izlaganja u nekoj teoriji.

Definicija ima dva glavna dela: **definiendum**, deo koji se definiše i **definiens**, deo kojim se definiše.

Pri obrazovanju definicije, u izboru novog termina ili simbola imamo veliku slobodu; naime, novi termin (simbol) može biti bilo koji termin (simbol) koji prethodno nije upotrebljen.,

Definicja, ipak, mora da ispuni određene uslove da bi bila korektna. To su: **otkloniivost** i **nekreatlvnost**. Ovi pslovi se mogu formullsati na sledeći način:

- novouvedeni termin ili simbol mora biti otklonjiv iz svakog iskaza ili formule teorije u kojima se pojavljuje;
- definicijom se ne srne dobiti tvrđenje (teorema) teorije koje se bez nje ne bi moglo dobiti, tj. definicija ne srne da bude kreativna.

U logici i matematici od velikog značaja su tzv. **induktivne** (ili **rekurzivne**) **definicije [3]**. Struktura induktivnih definicija može se opisati na sledeći način:

> Pretpostavimo da pomoću induktivne definicije želimo da definišemo skup Xnek: objekata. Definicija se sastoji od jednog skupa pravila od kojih svako određuje d; pod izvesnim pretpostavkama neki objekat x pripada skupu X. Pri tome, neke od tih pretpostavki mogu tvrditi da se neki objekti, koji su sa objektom x povezani na Izvestan način, već nalaze u skupu X.

Kada se skup X definise ovom vrstom definicija, pretpostavlja se daje neki objekat element skupa X ako i samo ako ta činjenica proizilazi iz pravila koja čine induktivnu definiciju.

> Induktivnim definicijama se, npr., određuju formule nekog formalnog jezika.

Definicije

> Kron, str. 6 ♦ str. 6
> Prešić, str. 62-68 ♦ str. 62-63
> Božić, str. 143-155

[22] Šta je to logička forma?

Logika se često definiše kao nauka o **formama** (oblicima) valjane misli.

Valjanost nekog zaključivanja, naime, ne zavisi od njegovog sadržaja, već od njegove forme (oblika, sheme). Ispitivanje valjanosti nekog zaključivanja sastoji sa ii ispitivanju valjanosti njegove forme.

> Pri tome, pojmove valjanosti i istinitosti treba jasno razlikovati. Npr., iako sama valjanost zaključivanja nije sigurna garancija istinitosti zaključka, ona je jedan od dva nužna i dovoljna uslova te istinitosti (drugi je istinitost premisa); ako valjano zaključujemo polazeći od Istinitih premisa, zaključak mora biti istinit.

Često se kaže da se logička forma ne može definisatl ali se može pokazati.

Prve logičke forme definisao je Aristotel, tzv. Aristotelove silogizme, da bi se u modernoj logici došlo do takvih bogatih formalnih štrukura kao što su **formalna teorija i formalni jezik [4]**.

> Matematička tvrđenja izražavamo **prirodnim jezikom** (srpski, engleski, ruski...), koji se, po potrebi, proširuje određenom matematičkom terminologijom i simbolikom. Međutim, prirodni jezik ima nedostatke kao što su nedovoljno precizna i ponekad protivurečna struktura, dvosmislenost i si. Zbog toga je za izučavanje matematičkih tvrđenja neophodan formalni jezik, odnosno takav jezik čija je struktura potpuno regularna.
>
> Formalni jezik se sastoji iz osnovnih **simbola** i **formula**.

U savremenim formalnim teorijama, kao logička forma može se shvatiti svaka formula formalnog jezika. Tako su **iskazne** i **predlkatske formule** određene logičke forme

Od posebnog značaja su formule koje su **tautologlje [31]** (u iskaznoj logici) odnosno **valjane formule [18]** (u predikatskoj logici) jer se one mogu shvatiti kao svojevrsni logički zakoni.

Logička forma

> Lemmon, str. 15,102

[23] Šta je to drvo formule?

Ukoliko smo, za osnovne simbole formalnog jezika jskazne logike [T] uzeli:

- iskazne promenljive (iskazna slova): *p, q, r,* p_1, q_1, r_1 ....
- iskazna konstanta ⊥,
- logičke **veznici [2]**. ∧, ∨, ⇒,
- interpunkcijski simboli: (,).

i ukoliko smo skup iskaznih formula definisali sledećom **induktivnom definlcjom [3]**:

(a) Iskazne promenljive i iskazna konstanta ⊥ su iskazne formule.
(b) Ako su A i B iskazne formule, onda su i (A∧B), (A∨B) i (A⇒B) iskazne formule.

tada skup svih **potformula** neke iskazne formule A definišemo sledećom induktivnom definicijom:

(a) Formula A je potformula formule A.
(b_1) Ako je (B∧C,) potformula formule A, onda su i formule B i C potformule formule A.
(b_2) Ako je (B∨C) potformula formule A, onda su i formule B i C potformule formule A.
(b_3) Ako je (B⇒C) potformula formule A, onda su i formule B i C potformule formule A.

Iskazne promenljive i iskazna konstanta J_, posmatrane kao formule, zovu se **atomske** (**elementarne**) **formule**.

Svaka iskazna formula može se prikazati u obliku drveta svojih potformula. Pri tome se polazi od glavne formule koja se raščlanjuje na svoje (najviše dve) potformule, a onda se dobljene potformule dalje raščlanjuju na isti način, sve dok se ne dođe do atomskih formula.

Formalno, **drvo** definišemo kao određenu relacijsku strukturu (X, R) koju čine skup X i binama relacija R skupa X. Elemente skupa X zovemo 'čvorovi'. Ako su dva elementa x i y skupa X u relaciji R, tj. ako važi (x, y) ∈ R, kažemo 'x je prethodnik od y' ili 'y je naslednik od x'. Struktura (X, R) je drvo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(1) postoji tačno jedan čvor, koji se zove 'koren', koji nema nijednog prethodnika,
(2) svaki čvor, osim korena, ima tačno jednog prethodnika.

Čvorove koji nemaju naslednika zovemo 'listovi'.

Iz definicije proizilazi da od svakog čvora do korena postoji samo jedan, tačno određen put.

Drvo formule

predavanja, 17. 11. 2003.
Kron, str. 13-14

[24] Šta je to istinitosna funkcionalnost?

Svako preslikavanje (funkciju) f čiji je kodomen skup 2 = {0, 1} zovemo **istinitosna funkcija**.

Istinitosnu funkciju f_A neke iskazne formule A definisaćemo kao preslikavanje koje svakoj **valuaciji [30]** *v* **iskaznih promenljivih** formule A dodeljuje **vrednost** *v* (A) **iskazne formule** A za valuaciju *v*.

Precizna definicija glasi:

Neka je $\{p_1, ..., p_n\}$ skup svih iskaznih promenljivih koje se javljaju u formuli A. Tada preslikavanje f_A: $2^n \Rightarrow 2$ zovemo **istinitosna funkcija iskazne formule** A ako za svaku valuaciju *v* skupa iskaznih promenljivih $\{p_1, ..., p_n\}$ važi:

$f_A\ (v(p_1), ..., v(\ p_n)) = v(A)$,

gde je *v*(A) vrednost iskazne formule A za valuaciju *v*.

> Činjenica da svaka iskazna formula ima svoju istinitosnu funkciju naziva se **istinitosna funkcionalnost** iskaznih formula. Može se u istom smislu govoriti i o istinitosnoj funkcionalnosti logičkih **veznika [2]**.
>
> Jasno je da za svaku iskaznu formulu A postoji tačno jedna istinitosna funkcija f_A formule A.
>
> S druge strane, dve različite iskazne formule mogu imati istu istinitosnu funkciju. To je, npr. slučaj sa formulama:
>
> $(p \lor q) \land \neg r$,
>
> $((p \lor q) \lor \neg r) \land (p \lor \neg p)$.
>
> Istinitosna funkcija iskazne formule A može se u potpunosti predstaviti istinitosnom tablicom formule A.

Može se postaviti sledeće pitanje: da li za neku datu istinitosnu funkciju postoji odgovarajuća iskazna formula? Pozitivan odgovor daje sledeća teorema.

Teorema

> Za svaku istinitosnu funkciju: $f:2^n \Rightarrow 2$
>
> postoji bar jedna iskazna formula A u kojoj se javlja najviše n iskaznih promenljivih $p_1, ..., p_n$ i za koju je f_A=f.

[Dokaz.]

Teorema

> Za svake dve iskazne formule A i B važi:
>
> > $\models A \Leftrightarrow B$ ako i samo ako $f_A = f_B$.

[Dokaz.]

Navedene teoreme izražavaju **funkcionalnu potpunost Iskazne logike [11]**.

[25] Šta je to matematička indukcija?

Jedan od najvažnijih metoda zaključivanja u matematici jeste matematička indukcija.

Princip **matematičke indukcije** može se iskazati na sledeći način:

> Neka je P(0), P(1), P(2), ..., P(n),... niz matematičkih tvrđenja. Za svaki prirodan broj n tvrđenje P(n) je tačno ako:
>
> (a) tvrđenje P(0) je tačno,
> (b) za svaki prirodan broj n važi:
>
> > ako je tačno P(n) onda je tačno i P(n+1).

Princip matematičke indukcije počiva na sledećem rasuđivanju, koje smatramo ispravnim:

> Ako je tačno P(0), budući da je tačno P(0) => P(1), tačno je i P(1). Kako je tačno P(1) => P(2), onda je tačno i P(2). Kako je tačno P(2) => P(3), onda je tačno i P(3). Itd., zaključujemo da je P(n) tačno za svaki prirodan broj n.

Uobičajeno je da se tvrđenje P(0) naziva **baza indukcije**. Implikacija P(n) => P(n+1) naziva se **indukcijski korak**, a antecedens te implikacije, tvrđenje P(n), naziva se **indukcijska hipoteza** (ili **pretpostavka**).

U formalnom zasnivanju teorije brojeva, princip matematičke indukcije takođe važi. On se tada zadaje kao aksioma, tzv. **aksioma indukcije**.

Princip matematičke indukcije možemo shvatiti kao specijalni slučaj opštijeg pojma **indukcija po elementima skupa**, koji važi za skupove koji su definisani tzv. **induktivnim definicijama [3]**.

Struktura induktivnih definicija može se opisati na sledeći način:

> Pretpostavimo da pomoću induktivne definicije želimo da definišemo skup X nekih objekata. Definicija se sastoji od jednog skupa pravila od kojih svako određuje da pod izvesnim pretpostavkama neki objekat x pripada skupu X. Pri tome, neke od tih pretpostavki mogu tvrditi da se neki objekti, koji su sa objektom x povezani na izvestan način, već nalaze u skupu X.
>
> Kada se skup X definiše ovom vrstom definicija, pretpostavlja se da je neki objekat element skupa X ako i samo ako ta činjenica proizilazi iz pravila koja čine induktivnu definciju.

Za skupove koji su definisani induktivnim definicijama, neke teoreme mogu se dokazivati indukcijom. Pretpostavimo da je X skup definisan induktivnom definicijom. Da bi se dokazalo da svaki njegov element ima određeno svojstvo P, dovoljno je dokazati da objekti koji zadovoljavaju pravila definicije imaju svojstvo P. Za takav dokaz se kaže da je izveden indukcijom po elementima skupa X. U takvom dokazu, pretpostavke u pravilima induktivne definicije da neki objekti pripadaju skupu X postaju pretpostavke da izvesni objekti imaju svojstvo P i zovu se indukcijske hipoteze.

U specijalnom slučaju, kada za skup X uzmemo skup N svih prirodnih brojeva (tj. kada dokazujemo da svi prirodni brojevi imaju neko svojstvo P), dokaz se svodi na dokaz matematičkom indukcijom.

[26] Šta je to metajezik?

Kada je jezjk predmet proučavanja uvek se javljaju dva jezika: jezik koji proučavamo, **objekt-jezik**, i jezik u kome se to proučavanje izvodi, **metajezik**.

U opštem slučaju, to mogu biti bilo koji jezici (prirodni ili **formalni jezici [4]**), pa čak jedan isti jezik može biti i objekt-jezik i metajezik. Najčešće je, međutim, objekt-jezik neki formalni jezik, a metajezik neki prirodni jezik proširen uobičajenim matematičkim terminima i simbolima.

> Npr., matematička logika izučava **formalni jezik iskazne logike [1]** ili formalni jezik predikatske logike (**jezik prvog reda [17]**), i u tom proučavanju to su objekt-jezici. Njihovo proučavanje se, međutim, mora obavljati na nekom prirodnom jeziku, tj. na metajeziku.

Na sličan način treba razlikovati pojmove objekt-teorije i metateorije. Za opisivanje i izgrađivanje neke **formalne teorije** koristi se izvesna „obična" (tj. neformalno zasnovana) matematička teorija, koju zovemo **metateorija** te formalne teorije. Formalnu teoriju u tom slučaju zovemo **objekt-teorija**. Metateorija se izlaže na metajeziku.

> Npr., u zasnivanju i proučavanju formalne teorije skupova ili formalne teorije brojeva koristi se metateorija koja nužno sadrži delove matematičke logike, kao što su iskazni i predikatski račun,

Pod **teoremama [36]** neke formalne teorije podrazumevamo one i samo one formule za koje u toj teoriji postoji bar jedan dokaz (ili **dedukcija [34]**). Teoreme formalne teorije nazivaju se i **objekt-teoreme**. Tvrđenja, pak, koja se odnose na samu formalnu teoriju (i koja, dakle, pripadaju metateoriji) nazivaju se metateoreme.

> Npr., poznate teoreme dedukcije u iskaznoj i predikatskoj logici su metateoreme.

Možemo uočiti da su objekt-teoreme sintaktički objekti, dok metateoreme Izražavaju semantička tvrđenja o nekoj formalnoj teoriji.

Metajezik

> Vujošević, str. 7 ♦ str. 7
> Kron, str. 5-8 ♦ str. 6-8
> Prešić, str. 71-72

[27] Šta je to algebra?

Algebarskom strukturom naziva se matematička struktura koju čine neki skup S i neke operacije toga skupa (jedna ili više njih). Za svaku pojedinačnu strukturu, takozvanim aksiomama strukture, definišu se određena svojstva njenih operacija. U svakoj algebarskoj strukturi je definisana i relacija jednakosti (u oznaci =).

Podsetnik:

- Šta je to binarna operacija nekog skupa?
- Šta je to unarna operacija nekog skupa?
- Šta je to binarna relacija nekog skupa?

Algebrom se obično nazivaju određene složene algebarske strukture. U matematici i logici od velikog značaja su **Bulove algebre [9]**.

Ponekad se algebrom naziva bilo koja algebarska struktura.

[Definicija Bulove algebre.]

[Definicija **Lindenbaumove algebre [10]** iskazne logike.]

Algebra

> predavanja, 8. 12. 2003.
> Božć, str. 24

[28] Šta je to sintaksa?

Uopšte uzev, **sintaksa** je teorija čisto formalnih odnosa među znacima, pri Čemu je najčešće reč o jezičkim znacima. Sintaksa, dakle, potpuno zanemaruje odnos između znakova i njihovog značenja. Ovim drugim bavi se **semantika [29]** .

Tako se može govoriti o sintaksi bilo kog jezika. Kada se govori o sintaksi nekog prirodnog jezika (npr. o sintaksi srpskoga jezika), tada se sintaksa obično naziva 'nauka o rečenici' i predstavlja deo gramatike.

U filozofsko-logičkom smislu, sintaksa je teorija koja se bavi formalnim problemima **formalnih jezika [4]**. kao što su, npr., **formalni jezik iskazne logike [1]** ili formalni jezik predikatske logike (**jezik prvoga reda [17]**).

Za razliku od problema značenja, formalni problemi se odnose na strukturu formalnog jezika i ne zavise od interpretacije njegovih simbola i formula.

> Npr., sintaksa utvrđuje pravila po kojima se od osnovnih simbola nekog formalnog jezika grade njegove formule. Takva pravila su, recimo, **induktivne definicije [3]** formula iskazne logike ili induktvine definicije terma, atomskiih formula i formula predikatske logike. Na osnovu ovih pravila, za svaki konačni niz simbola (ili 'reč') nekog formalnog jezika, može se utvrditi da li predstavlja formulu.
>
> Sintaksa neke formalne teorije određena je njenim formalnim jezikom, skupom aksioma i skupom pravila izvođenja. Dokazi (ili **dedukcije [34]**) u nekoj formalnoj teoriji su takođe sintaktički obejkti.
>
> **Teoreme [36]** neke formalne teorije (koje se još nazivaju i **objekt-teoreme**) jesu sintaktički objekti. **Metateoreme**, pak, kao tvrđenja koja se odnose na samu formalnu teoriju, pripadaju semantici.
>
> Teorema **potpunosti iskazne logike [15]** kaže da je neka iskazna formula teorema iskazne logike ako i samo ako je **tautologija [31]**. Ova činjenica se naziva saglasnošću sintakse sa semantikom iskazne logike.
>
> Analogna teorema potpunosti važi i u predikatskoj logici

Sintaksa i semantika

> predavanja, 17. 11. 2003.
> Kron, str. 2. 4 ♦ str. 2, 4
> Vujošević, str. 7, 75-76, 91-92, 97 ♦ str. 7, 97
> Prešić, str. 72

[29] Šta je to semantika?

Uopšte uzev, **semantika** je teorija o značenju znakova. Kada se radi o jezičkim znacima - što je najčešće slučaj - treba praviti razliku između semantike u lingvističkom i semantike u filozofsko-logičkom smislu. Prva se bavi značenjima reci i grupacija reči prirodnih jezika pri čemu se ta značenja proučavaju s različitih aspekata.

Zadatak filozofsko-logičke semantike jeste interpretacija **formalnih jezika [4]** kao što su, npr. **formalni jezik iskazne logike [1]** ili formalni jezik predikatske logike (**jezik prvoga reda [17]**).

Značenja simbola i formula formalnih jezika, a posebno značenja logičkih **veznika [2]**, ne proučavaju se. već se ustanovljavaju na eksplicitan način, pomoću određenih semantičkih pravila.

> Za interpretaciju **iskazne logike** uzimamo algebarsku strukturu (2, ∨, ∧, ¬, 0,1), tzv. **Bulovu algebru 2**. Iskazne promenljive interpretiramo kao elemente skupa 2 = {0, 1}, logičke veznike ∨, ∧ i ¬ redom kao operacije ∨, ∧, ¬ Bulove algebre 2. a iskazne konstante ⊥ i T redom kao 0 i 1 tj. kao najmanji i najveći element Bulove algebre 2. Pojmove **valuacija [30] iskaznih promenljivih i vrednost iskazne formule** definišemo kao određena preslikavanja u skup 2. Pomoću ovih pojmova, dalje, definišemo pojam tautologija [31].
>
> S obzirom na ovakvu interpretaciju iskazne logike, za svaku iskaznu formulu može se utvrditi da Ii je tautologija, što znači da je iskazna logika **semantički odlučiva formalna teorija**.
>
> Predikatska logika nije semantički odlučiva.
>
> **Teoreme [36]** neke formalne teorije (koje se još nazivaju i objekt-teoreme) jesu sintaktički objekti. **Metateoreme**, pak, kao tvrđenja koja se odnose na samu formalnu teoriju, pripadaju semantici.
>
> Teorema **potpunosti iskazne logike [15]** kaže da je neka iskazna formula teorema iskazne logike ako i samo ako je tautologija. Ova činjenica se naziva saglasnošću **sintakse [28]** sa semantikom iskazne logike.
>
> Analogna teorema potpunosti važi i u predikatskoj logici.

Sintaksa i semantika

> predavanja, 17. 11. 2003.
> Kron, str. 2, 4 ♦ str. 2, 4
> Vujošević. str. 7, 75-76, 91-92, 97 ♦ str. 7, 97
> Prešić, str. 72

[30] Šta je to valuacija?

Ukoliko smo za osnovne simbole formalnog jezika iskazne logike [Tj uzeli:

- iskazne promenljive (iskazna slova): p, q, r, p_1, q_1, r_1 ....
- iskazna konstanta $\perp$,
- logičke **veznici [2]**. $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$,
- interpunkcijski simboli: (,).

tada skup svih formula iskazne logike (iskaznih formula) možemo definisali sledećom **induktivnom definicijom [3]:**

(a) Iskazne promenljive i iskazna konstanta $\perp$ su iskazne formule.
(b) Ako su A i B iskazne formule, onda su i $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$ i $(A\Rightarrow B)$ iskazne formule.

Neka je algebarska struktura $(2, \vee, \wedge, \neg, 0,1)$ jedna **Bulova algebra 2**. Njen skupovni deo (domen) je, dakle, skup $2 = \{0, 1\}$.

Neka je P skup svih iskaznih promenljivih. **Valuacija iskaznih promenljivih** je bilo koje preslikavanje v skupa P u skup 2 (u oznaci v: $P\Rightarrow 2$). Dakle, za neku iskaznu promenljivu p valuacijom v dobija se v (p), pri čemu je $v(p) \in 2$. v (p) nazivamo **vrednost** (ili **interpretacija**) **iskazne promenljive** p za valuaciju v.

Očigledno je da se za neku iskaznu promenljivu p mogu definisati najviše dve valuacije: $v_1(p) = 0$ i $v_2(p) = 1$.

Neka je A neki podskup skupa P koji sadrži tačno dve iskazne promenljive p i q, tj. A = {p, q). Mogu se definisati sledeća četiri različita preslikavanja skupa A u skup 2:

$v_1(p) = 0$, $v_1(q) = 0$
$v_2(p) = 0$, $v_2(q) = 1$
$v_3(p) = 1$, $v_3(q) = 0$
$v_4(p) = 1$, $v_4(q) = 1$

Skup od dve iskazne promenljive ima, dakle, četiri valuacije.

Uopšte, skup od n iskaznih promenljvih, gde je n neki prirodan broj, ima 2^n valuacija.

Neka je A iskazna formula i neka je v jedna valuacija iskaznih promenljivih. **Vrednost** (ili **interpretaciju**) **iskazne formule** A za valuaciju u označavamo sa v (A) i definišemo tzv. indukcijom po složenosti formule A na sledeći način:

(a) $v(\perp) = 0$,

(b) ako su A i B iskazne formule čije su vrednosti v (A) i v (B) definisane, onda je:

$v(A\wedge B) = v(A) \wedge v(B)$,
$v(A\vee B) = v(A) \vee v(B)$,
$v(A\Rightarrow B) = \neg\, v(A) \vee v(B)$

(Ovde treba zapaziti da se u (b) sa leve strane znakova jednakosti pojavljuju logički veznici $\wedge$, $\vee$ i $\Rightarrow$ dok se sa desne strane pojavljuju operacije $\wedge$, $\vee$ i $\neg$ Bulove algebre 2.)

Vidimo, dakle, da $v(A) \in 2$ za bilo koju iskaznu formulu A i bilo koju valuaciju v. To znači da smo ovakvom definicijom "vrednosti formule A faktički proširili preslikavanje v: $P \Rightarrow 2$ do preslikavanja v: $F \Rightarrow 2$, gde je F skup svih iskazinih **??? nema kraja ????**

[31] Šta je to tautologija?

Ukoliko smo za osnovne simbole formalnog jezika iskazne logike [Tj uzeli:

- iskazne promenljive (iskazna slova): *p, q, r,* p_1, q_1, r_1 ....
- iskazna konstanta ⊥,
- logičke **veznici [2]**. ∧, ∨, ⇒,
- interpunkcijski simboli: (,).

tada skup svih formula iskazne logike (iskaznih formula) možemo definisali sledećom**induktivnom definicijom [3]:**

> (a) Iskazne promenljive i iskazna konstanta ⊥ su iskazne formule.
> (b) Ako su A i B iskazne formule, onda su i (A∧B), (A∨B) i (A⇒B) iskazne formule.

Neka je algebarska struktura (2, ∨, ∧, ¬, 0,1) jedna **Bulova algebra 2**. Njen skupovni deo (domen) je, dakle, skup 2 = {0, 1}.

Neka je P skup svih iskaznih promenljivih. **Valuacija iskaznih promenljivih** je bilo koje preslikavanje *v* skupa P u skup 2 (u oznaci *v*: P⇒2). Dakle, za neku iskaznu promenljivu p valuacijom *v* dobija se *v* (p), pri čemu je *v* (p) ∈ 2. *v* (p)
nazivamo **vrednost** (ili **interpretacija**) **iskazne promenljive** p za valuaciju *v*.

Neka je A iskazna formula i neka je *v* jedna valuacija iskaznih promenljivih. **Vrednost** (ili **interpretaciju**) **iskazne formule** A za valuaciju *v* označavamo sa *v* (A) i definišemo tzv. Indukcijom po složenosti formule A na sledeći način:

(a) v(⊥) = 0,

(b) ako su A i B iskazne formule čije su vrednosti *v* (A) i *v* (B) definisane, onda je:

> *v* (A∧B) = *v*(A) ∧*v*(B),
> *v* (A∨B) = *v*(A) ∨*v*(B),
> *v* (A⇒B) =¬ *v*(A) ∨*v*(B)

(Ovde treba zapaziti da se u (b) sa leve strane znakova jednakosti pojavljuju logički veznici ∧, ∨i ⇒ dok se sa desne strane pojavljuju operacije ∧, ∨i ¬ Bulove algebre 2.)

Vidimo, dakle, da *v* (A) ∈ 2 za bilo koju iskaznu formulu A i bilo koju valuaciju *v*. To znači da smo ovakvom definicijom "vrednosti formule A faktički proširili preslikavanje *v*: P ⇒ 2 do preslikavanja *v*: F ⇒ 2, gde je F skup svih iskazinih formula. Budući da je ovo proširenje jedinstveno, to možemo i polazno preslikavanje skupa iskaznih promenljivih i njegovo proširenje na skup Iskaznih formula označavati istim simbolom *v* i istim terminom 'valuacija'.

> Neka je A neka iskazna formula koja sadrži tačno dve iskazne promenljive *p* i *q*. Budući da skup od dve iskazne promenljive ima četiri valuacije, sve vrednosti formule A utvrdićemo nakon najviše četiri Izračunavanja.
>
> Uopšte, sve vrednosti neke iskazne formule A koja sadrži n iskaznih promenljvih, gde je n neki prirodan broj, možemo utvrditi nakon najviše 2^n izračunavanja.
>
> Kada ispitujemo vrednosti neke iskazne formule **metodom Istinitosnih tablica**, svaki red u tablici predstavlja'zapravo izračunavanje vrednosti formule za jednu valuaciju promenljivih.

Ukoliko je vrednost iskazne formule A za valuaciju v jednaka 1, tj. ukoliko je v (A) = 1, kažemo da valuacija u **zadovoljava formulu** A ili da je valuacija u **model formule** A. Ovo označavamo sa: v |= A.

Neka je G neki skup iskaznih formula. Ukoliko za valuaciju v i za svaku formulu A iz skupa G važi: *v*|= A kažemo da valuacija v **zadovoljava skup formula** G ili da je valuacija u **model skupa formula** G. Ovo označavamo sa: v|= G.

Iskazna formula A je **logička** (ili **semantička**) **posledica** skupa formula G (u oznaci G |= A) ako svaka valuacija *v* koja **zadovoljava** G zadovoljava i A. U tom slučaju, formule skupa G zovemo **hipoteze**.

Iskazna formula A je **tautologija [31]** ako je njena vrednost jednaka 1 za svaku valuaciju v. Drugim recima, formula A je tautologija ako je svaka valuacija v zadovoljava, tj. ako za svaku njenu valuaciju v važi: v|= A Da je formula A tautologija označavamo sa: |= A Tautologije se još nazivaju I **logičke Istine Iskazne logike**.

Analogno se definiše suprotni pojam kontradikcije. Iskazna formula A je kontradikcija ako je njena vrednost jednaka 0 za svaku valuaciju v, tj. ako ne postoji nijedna valuacija v koja je zadovoljava.

Iz definicija tautologije i kontradikcije neposredno proizilazi da je negacija tautologije kontradikcija i, obratno, da je negacija kontradikcije tautologija.

Iskazne formule koje nisu ni tautologije ni kontradikcije nazivaju se kontingenclje.

Skup F svih iskaznih formula ima svojstva bliska **Bulovoj algebri [9]**. Tako, konjunkcija, disjunkcija i negacija imaju sva svojstva bulovskih operacija. Ukoliko relaciju <=> skupa F shvatimo kao jednakost, tada tako dobijena struktura potpuno odgovara Bulovoj algebri. Ulogu 0 može da ima bilo koja kontradikcija, a ulogu 1 bilo koja tautologija. Preslikavanje v: F => 2 tada možemo shvatiti kao homomorfizam te strukture u Bulovu algebru 2.

Budući da je svaka iskazna formula konačni niz simbola i da, prema tome, sadrži konačni broj iskaznih promenljivlh, to se za svaku iskaznu formulu može utvrditi da Ii je tautologija. Dva efektivna metoda (algoritma) kojima se to može uraditi jesu metod istinitosnih tablica i **metod čišćenja** (ili **metod istinitosnih drveta**).

[Metod istinitosnih tablica; Kron, str. 19-20.
Metod čišćenja (ili metod istinitosnih drveta), predavanja, 1.12. 2003; Kron, str. 21-23]

činjenica da se za svaku iskaznu formulu može utvrditi da Ii je tautologija znači, zapravo, da je iskazna logika **semantički odlučiva formalna teorija**.

S obzirom na teoremu **potpunosti iskazne logike [15]** koja tvrdi da je neka iskazna formula **teorema [36**] iskazne logike ako i samo ako je tautologija, iz prethodne činjenice proizilazi da je iskazna logika **odlučiva formalna teorija [8]**.

Tautologije

predavanja, 24. 11. 2003.
Vujošević, str. 73-74
Kron, str. 18-20
Prešić, str. 12-18
Božić, str. 80-85

[34] Šta je to dedukcija?

U najopštijem smislu, dedukcija je izvođenje posebnog i pojedinačnog iz opšteg, saznanje jednog konkretnog slučaja posredstvom nekog opšteg zakona.

U matematici i logici, dedukcijom se danas naziva, opet uopšteno rečeno, izvođenje nekog tvrđenja Iz nekih drugih tvrđenja.

Za neko zaključivanje kažemo da je deduktivno ako Ispunjava uslov salva veritate (SV) koji glasi: ako su premise u nekom zaključivanju istinite, onda je i zaključak istinit. Drugim recima, u deduktivnom zaključivanju nije moguće da sve premise budu Istinite a da zaključak bude neistinit.

Formalna definicija dedukcije daje se u okviru neke **formalne teorije**.

Pod **dokazom** (ili **dedukcijom, izvođenjem**) formule A u formalnoj teoriji F podrazumevamo konačan niz formula na čijem kraju je A, pri čemu je svaka formula niza ili aksioma ili zaključak nekog pravila izvođenja čije premise su neke prethodne formule toga niza.

Formulu A tada zovemo **teorema [36]** formalne teorije F. (Skup svih teorema formalne teorije F može se definisati i drugačije, tzv. **induktivnom definicijom [3]**.)

Neka je G neki skup formula teorije F. Pod **dokazom** (ili **dedukcijom, izvođenjem**) formule A iz **hipoteza** skupa G podrazumevamo konačan niz formula teorije F na čijem kraju je A, pri čemu je svaka formula niza ili aksioma ili formula iz skupa G ili zaključak nekog pravila izvođenja čije premise su neke prethodne formule toga niza.

Formulu A tada zovemo posledica (ili sintaktička posledica) skupa formula G, a formule skupa G zovemo **hipoteze** (ili **pretpostavke**).

Dedukcija

> Vujošević, str. 78
> Prešić, str. 77-80
> Kron, str. 14-17

[35] Šta je to hilbertovski sistem?

Svaka formalna teorija (formalni sistem) sastoji se iz tri komponente:

- **formalnog jezika [4]**,
- aksioma i
- pravila izvođenja (zaključivanja)

Formalni jezik sastoji se iz osnovnih simbola i formula.

Skup svih aksioma neke formalne teorije je određeni podskup skupa svih formula te teorije.

Pravila izvođenja (**zaključivanja**) omogućavaju da se iz izvesnih formula teorije (koje se zovu **premise** pod određenim uslovima izvede neka druga formula (koja se zove zaključak pravila).

Hilbertovskim sistemom naziva se ona formalna teorija koja među svojim pravilima izvođenja sadrži tzv. modus ponens:

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

Npr., **iskazna logika** kao formalna teorija jeste jedan hilbertovski sistem, jer, bez obzira na to kako je definisan skup aksioma, teorija sadrži modus ponens kao pravilo izvođenja.

Modus ponens je verovatno najstarije od svih poznatih pravila izvođenja. Bilo je poznato već Stoicima, u III veku p. n. e. Ovo pravilo je ujedno i „najprirodnije", tj. najbliže našem intuitivnom zaključivanju. U mnogim formalnim teorijama, modus ponens je i jedino pravilo izvođenja.

Važna osobina hilbertovskih sistema je da oni **nisu sintaksički odlučivi**. To, naime, znači da ne postoji efektivan postupak (algoritam) kojim bi se za svaku datu **teoremu [36]** sistema mogao generisati njen dokaz (**dedukcija [34]**).

Intuitivno nam je jasno i zašto je to tako (što se može i formalno dokazati). Modus ponens je, naime, takvo pravilo zaključivanja koje nam ne omogućava da se u zaključivanju vratimo unazad. Kada znamo samo zaključak pravila, ne možemo pouzdano znati koje su bile njegove premise.

Iz ovoga proizilazi da nj iskazna logika nije sintaktički odlučiva teorija, iako jeste **semantički odlučiva [8]** . Međutim, budući da se skup svih teorema iskazne logike definiše **induktivnom definicjom [3]** to postoji efektivan postupak kojim se generišu teoreme iskazne logike. Zato možemo reći da je iskazna logika parcijalno sintaktički odlučiva.

Predikatska logika kao formalna teorija takođe prestavlja jedan hilbertovski sistem. Ona nije semantički odlučiva tebrija. ali je, u istom smislu kao iskazna logika, parcijalno sintaktički odlučiva.

Hilbertovski sistem

predavanja, 23. 2. i 5. 3. 2004.
Vujošević, str. 97

[36] Šta je to teorema?

Svaka formalna teorija (formalni sistem) sastoji se iz tri komponente:

- **formalnog jezika [4]**,
- aksioma i
- pravila izvođenja (zaključivanja)

Formalni jezik sastoji se iz **osnovnih simbola i formula**.

Skup svih aksioma neke formalne teorije je određeni podskup skupa svih formula te teorije.

Pravila izvođenja omogućavaju da se iz izvesnih formula teorije (koje se zovu **premise**) pod određenim uslovima izvede neka druga formula (koja se zove **zaključak** pravila).

Skup svih teorema formalne teorije F definišemo sledećom **induktivnom definicijom [3]**:

> (a) sve aksiome teorije F su teoreme,
> (b) ako su sve premise nekog pravila zaključivanja teoreme teorije F, onda je teorema i zaključak toga pravila.

Detaljniji opis skupa teorema teorije F može se dati ovako:

> Neka je S_0 skup aksioma teorije F; na osnovu (a), svi elementi toga skupa su teoreme. Neka je S_1 skup svih formula koje su zaključci pravila izvođenja teorije F čije su sve premise aksiome, tj. elementi skupa S_0 na osnovu (b), svi elementi skupa S_1 su teoreme. Neka je S_2 skup svih formula koje su zaključci pravila izvođenja čije su premise elementi skupa S_0 U S_1; na osnovu (b), svi elementi skupa S_2 su teoreme. Na isti način možemo konstruisati skupove S_3, S_4, itd. Postupak možemo nastaviti sve dok dobijamo nove teoreme teorije F.

Da bi se dokazalo da svaka teorema formalne teorije F ima određeno svojstvo P, dovoljno je dokazati da to svojstvo imaju formule koje zadovoljavaju pravila induktivne definicije skupa teorema. Drugim recima, dovoljno je dokazati da svaka aksioma ima svojstvo P i da ako sve premise nekog pravila izvođenja imaju svojstvo P, onda i zaključak toga pravila ima svojstvo P. Ovakvi dokazi zovu se dokazi indukcijom po **teoremarna**. Pretpostavka da premise pravila izvođenja imaju svojstvo P zove se **indukcijska hipoteza** (**pretpostavka**).

Pod **dokazom** (ili **dedukcijom [34], izvođenjem**) formule A u formalnoj teoriji F podrazumevamo konačan niz formula na čijem kraju je A, pri čemu je svaka formula niza ili aksioma ili zaključak nekog pravila izvođenja čije premise su neke prethodne formule toga niza.

Pokazačemo da je neka formula A teorema formalne teorije F ako i samo ako postoji bar jedan dokaz formule A u teoriji F.

> <-   Na osnovu (a) i (b) proizilazi da svaki član bilo kojeg dokaza u F mora biti teorema u F. Dakle, ako postoji dokaz formule A u F, onda je A teorema.
>
> ->   Da za svaku teoremu postoji bar jedan dokaz, dokazaćemo indukcijom po teoremarna. Ako je A aksioma, onda njen dokaz predstavlja jednočlanl niz formula koji se sastoji od same te formule A. Dakle, A ima bar jedan dokaz. Pretpostavimo da se A može dobiti kao zaključsk nekog pravila izvođenja čije su premise A_1,.... A_n. Na osnovu indukcijske pretpostavke, za svaku formulu A_i, gde je 1 <= i <= n, postoji bar jedan dokaz. Izaberimo za svaku formulu A_i, po jedan njen dokaz, poredajmo sve te dokaze u niz i dodajmo formulu A. Tako dobijeni niz je dokaz za A.

Ukoliko je formula A teorema formalne teorije F, pisaćemo: $|\!-_f$ A Ukoliko ne postoji opasnost od nesporazuma, može se pisati i samo: |- A.
U proučavanju neke formalne teorije, treba razlikovati pojmove objekt-teorije i metateorije. Za opisivanje i izgrađivanje neke formalne teorije koristi se izvesna .obična" (tj. neformalno zasnovana) matematička teorija, koju zovemo metateorija te formalne teorije. Formalnu teoriju u tom slučaju zovemo **objekt-teorija**. Metateorija se izlaže na **metajeziku [26]**.

> Npr., u zasnivanju i proučavanju formalne teorije skupova ili formalne teorije brojeva koristi se metateorija koja nužno sadrži delove matematičke logike, kao što su iskazni i predikatski račun.

Videli smo koje formule neke teorije podrazumevamo pod njenim teoremama. Teoreme neke teorije nazivaju se i **objekt-teoreme**. Tvrđenja, pak, koja se odnose na samu formalnu teoriju (i koja, dakle, pripadaju njenoj metateoriji) nazivaju se metateoreme.

> Npr., poznate teoreme dedukcije u iskaznoj i predikatskoj logici su metateoreme.

Možemo uočiti da su objekt-teoreme sintaktički objekti, dok metateoreme izražavaju semantička tvrđenja o nekoj formalnoj teoriji.
[Korolar i lema; predavanja, 1.12. 2003.]

Teoreme
> Kron, str. 5-6, 8
> Prešić, str. 64, 69-71

Presić, str. 64, 69-71
Vujošević, str. 77-78

[37] Šta je to model?

Interpretacija neke **formalne teorije** je svako preslikavanje **formalnog jezika [16]** te teorije (njenog objekt-jezika) u klasu objekata neke druge matematičke teorije.

Neka je, npr., L neki jezik **prvoga reda [17]** i neka je D neki neprazan skup. Interpretacija individualne konstante c jezika L je neki element $\underline{c}$ skupa D. Interpretacija operacijskog simbola f jezika L je neka operacija f skupa D odgovarajuće dužine. Interpretacija relacijskog simbola R jezika L je neka relacija $\underline{R}$ skupa D odgovarajuće dužine.

Relacijsko-operacijsku strukturu [16] čiji je domen neprazan skup D1 čije su sve relacije interpretacije relacijskih simbola jezika L1 čije su sve operacije interpretacije operacijskih simbola jezika L i čije su sve konstante interpretacije individualnih konstanti jezika L - zovemo **interpretacija jezika** L na skupu D **ili model jezika** L.

Ako za rečenicu A za svaku valuaciju *v* u modelu S važi *v* $|=_{s}$A, onda kažemo da **rečenica** A **važi u modelu** S ili da je S **model rečenice** A. To označavamo sa: S|=A.

Model S jezika L je **model skupa rečenica** G ako za svaku rečenicu A iz skupa G važi S |=A. To označavamo sa: S |= G.

Rečenica. A je **valjana formula [18]** ako važi u svakom modelu jezika L. Da je formula A valjana formula označavamo sa: |= A.

U iskaznoj logici, ukoliko je vrednost iskazne formule A za valuaciju *v* jednaka 1, tj. ukoliko je v (A) = 1, kažemo da valuacija v **zadovoljava formulu** A ili da je valuacija *v* **model formule** A. Ovo označavamo sa: *v*|=A.

Neka je G neki skup iskaznih formula. Ukoliko za valuaciju *v* i za svaku formulu A iz skupa G važi: v|=A, kažemo da valuacija *v* **zadovoljava skup formula** G ili da je valuacija *v* **model skupa formula** G. Ovo označavamo sa: v|=G.

Iskazna formula A je **tautologija [31]** ako je njena vrednost jednaka 1 za svaku valuaciju *v*. Drugim recima, formula A je tautologija ako je svaka valuacija v zadovoljava, tj. ako za svaku njenu valuaciju v važi: v|=A. Da je formula A tautologija označavamo sa: |=A.

Model

> Vujošević. str. 74, 91-94
> Prešić, str. 47. 73

[38] Šta je to promenljiva?

U matematici i logici **promenljive** su simboli koji služe kao „predstavnici" za proizvoljne objekte iz nekog unapred datog osnovnog područja (skupa). Tako, npr., promenljive u aritmetici obično označavaju bilo koji prirodan broj. Nasuprot promenljivih stoje konstante, koje su u matematici i logici simboli sa nepromenjivim značenjem.

Promenljive mogu uzimati različite vrednosti iz skupa kome pripadaju. Formula u kojoj se javljaju promenljive može imati različita značenja u zavisnosti od vrednosti promenljivih. Kada za neku formulu u kojoj se javljaju promenljive tvrdimo da je istinita, to znači da tvrdimo da je ta formula istinita za sva značenja svojih promenljivih.

U formulama iskazne logike javljaju se **iskazne promenljive** (iskazna slova). Iskazne promenljive uzimaju vrednosti iz skupa 2 koji je skupovnl deo (domen) algebarske strukture (2, v, a, -,, O1 1J, tzv. **Bulove algebre 2**.

Vrednost neke **iskazne formule** zavisi od **valuacije [30]** njenih **iskaznih promenljivih**.

[O valuaciji iskaznih promenljivih. O vrednosti iskazne formule.]

U formulama predikatske logike javljaju se **individualne promenljive**. Individualne promenljive uzimaju vrednosti iz nepraznog skupa D1 koji je domen **relacijsko-operacijske strukture [16]** S, koja je interpretacija ili **model [37] jezika prvoga reda [17]** L.

Javljanje individualnih promenljivih u predikatskim formulama može biti **vezano** i **slobodno**.

[O vezanim i slobodnim javljanjima individualnih promenljivh]

Može se pokazati da istinitost neke predikatske formule, za datu **valuaciju** *v* **individualnih promenljivih**, zavisi od njenih slobodnih promenljivih. Predikatske formule koje nemaju slobodnih promenljivih zovemo **rečenice** ili **zatvorene formule**. Ako je A rečenica, onda za svaku valuaciju *v* individualnih promenljivih u modelu S važi: $v \models_s A$ ili $v \models_s \neg A$

Promenljive

Kron, str. 7-8, 66-67

[39] Šta je to supstitucija?

U predikatskim formulama, individualne promenljive mogu se zamenjivati (supstituisati) pod određenim uslovima.

> Za proizvoljnu promenljivu x kažemo da je pod **dejstvom kvantifikatora** ∀y (odnosno ∃y) ukoliko postoji formula B u kojoj se x javlja i pri tome je ∀yB (odnosno ∃yB) potformula formule A.
>
> Javljanje promenljive x u formuli A je **vezano** ako se u tom javljanju promenljiva x nalazi pod dejstvom kvantifikatora ∀xB ili ∃xB. Ono javljanje promenljive x koje nije vezano je slobodno. U istoj formuli promenljiva x može imati više vezanih i više slobodnih javljanja. Ako promenljiva x ima slobodno javljanje u formuli A, kažemo da je promenljiva x slobodna u formuli A.
>
> **Promenljiva** y je **slobodna za promenljivu** x u formuli A ako se promenljiva x u formuli A ne nalazi pod dejstvom kvantifikatora ∀y ili ∃y.
>
> **Term** t je **slobodan za promenljivu** X u formuli A ako su sve njegove promenljive slobodne za promenljivu x u formuli A.
>
> Terme koji nemaju slobodnih promenljivih zovemo zatvoreni termi.
>
> Predikatske formule koje nemaju slobodnih promenljivih zovemo **rečenice** ili **zatvorene formule**.

Za predikatsku formula A neka simbol A^x_y označava formulu koja se dobija kada se sva javljanja individualne promenljive x u formuli A zamene javljanjima promenljive y.

TEOREMA O ZAMENI SLOBODNE INDIVIDUALNE PROMENLJIVE

1. Ako je promenljiva x slobodna u formuli A, ali nije slobodna u formuli G, dok se promenljiva y ne javlja ni u A niti u G, onda:
   G |- A ako i samo ako G |- A^x_y.
2. Ako je x slobodna u A, ali nije slobodna u G, dok se zatvoreni term t ne javlja ni u A niti u G, onda:
   G |- A ako i samo ako G |- A^x_t.
3. Ako je x slobodna u A, ali se ne javlja ni u G niti u formuli B, dok se zatvoreni term t ne javlja ni u A ni u G niti u B, onda:
   G, B |- A ako i samo ako G, A^x_t |- B.

[Dokaz.]

TEOREMA

> Neka su ∀xA i ∃xA predikatske formule, neka je individualna promenljiva x slobodna za promenljivu *y* u formuli A i neka *y* nije slobodna u A. Tada:
>
> > |- ∀xA ⇔∀A^x_y
> >
> > |- ∃xA ⇔∃A^x_y

Zamena promenljivih

> predavanja, 5. 4. 2004.
> Kron, str. 82-86

[40] Šta je to preneksna normalna forma?

Za svaku predikatsku formulu A postoji ekvivalentna formula B posebnog oblika.

Za javljanje kvantifikatora Q kaže se da je početno u formuli B ako mu ne prethodi nijedno javljanje veznika. Javljanje kvantifikatora Q u B je **neprazno** ako je oblika Qx i xje slobodna promenljiva u polju delovanja tog javljanja Q.

Formula B je u preneksnoj normalnoj formi ako je svako javljanje kvantifikatora početno i neprazno.

Preciznija definicija glasi:

> Predikatska formula A je u **preneksnoj normalnoj formi** ako A ima oblik A' ili oblik Q_1x_1,... Q_nX_nA', gde su, za sve i ∈ {1, ..., n}, Q_i kvantifikatori i x_i promenljive formule A' i pri tome A' ne sadrži javljanja kvantifikatora.

Teorema

> Za svaku predikatsku formulu A postoji formula B koja je u preneksnoj normalnoj formi tako da važi:
>
> |- A⇔B
>
> [Dokaz.]

Preneksna normalna forma

> predavanja, 26. 4. 2004.
> Kron. str. 87-89